


**CS de mathématique en 5TD**

- Veuillez traiter chaque question sur une feuille séparée.  
Il y a trois questions. Il faut donc répondre sur trois feuilles simples ou doubles.

**I. Nombres**

1. Justifiez complètement:
  - a) Le nombre de Mahler est irrationnel.
  - b)  $\sqrt{2}$  est irrationnel.
2. Définissez *nombre rationnel* et prouvez à l'aide d'un exemple (!) que tout rationnel admet une écriture décimale illimitée périodique.
3. Mettez le décimal périodique  $12,332454545\dots$  sous forme de fraction à numérateur et dénominateur entiers.
4. Le réel  $\frac{1}{0}$  n'existe pas. Justifiez.
5.  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n \cdot (n + 1)$ . Démontrez cette proposition *par récurrence*.

**II. Relations**

1. Définissez complètement *relation d'ordre* en langue française et dans le langage symbolique des mathématiciens.
2. Définissez la relation *divise* dans  $\mathbb{N}$ . Prouvez ensuite que  $(\mathbb{N}, |)$  est un ordonné non total.
3. Voici l'ensemble  $E = \emptyset$  équipé de la relation  $\mathfrak{R} = \emptyset$ . Vérifiez si  $(\emptyset, \emptyset)$  est un ordonné.
4. Voici l'ordonné  $(\mathbb{R}, \leq)$  et sa partie  $A = [3, 7[$ .
  - a) Prouvez que  $A$  n'a pas de maximum.
  - b) Calculez  $\min A$ ,  $\max A$ ,  $\inf A$ ,  $\sup A$ .

**III. Fonctions**

1. Définissez: a) *fonction* b) *racine de fonction*
2. Tracez des graphes cartésiens soignés des fonctions élémentaires:  
 $f(x) = 2x + 3$ ;  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  $h(x) = x^2 - 6x + 5$ .  
 Pour chacune de ces fonctions, précisez son domaine de définition et son image.
3. Calculez le domaine de définition de  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$ .