



le 18 juin 2004

CS de mathématique en 6SM

- Veuillez traiter chaque question sur une double feuille à en-tête du Collège

1. a. Résolvez dans  $\mathbb{R}$ :  $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1 - 3x)$ .

b. Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de  $f(x) = \ln \frac{2x-1}{x+1}$  au point d'abscisse 1.

c. Calculez l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe X, la courbe d'équation  $y = x \cdot \ln x$  et les droites d'équations  $x = e$  et  $x = e^2$ .

d. Développez la fonction  $f(x) = \ln(1+x)$  par la formule de Mac-Laurin et déduisez-en une série qui exprime  $\ln 2$ .

e. Calculez  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^{4x-1}$ .

f. Dérivez  $y = (\ln x)^{e^x}$

2. Une ellipse E, rapportée à ses axes, a des axes de longueurs 10 et 8.

a. Déterminez une équation cartésienne de E.

b. Calculez les coordonnées de ses foyers, les équations de ses directrices et son excentricité.

c. Déterminez une équation cartésienne de sa tangente T en son point p d'abscisse 4 et d'ordonnée positive (précisez la méthode utilisée).

d. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation de cette ellipse autour de l'axe X.

3. a. Calculez le déterminant de la matrice suivante et déterminez son rang en fonction des valeurs

réelles de b: 
$$\begin{pmatrix} 1-b & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 4-b \end{pmatrix}$$

b. Résolvez, discutez et interprétez géométriquement dans  $\mathbb{R}^3$  le système suivant:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 2ay + az = 2 \\ 3x + (a+2)y + (a+1)z = 9 \end{cases} \quad (a \text{ est un paramètre réel}).$$

c. Dans  $\mathbb{R}^3$  équipé d'un repère orthonormé, on donne le tétraèdre de sommets  $o = (0,0,0)$ ,  $a = (4,0,0)$ ,  $b = (0,3,0)$  et  $c = (0,0,2)$ .

Déterminez:

1). Une équation cartésienne du plan  $\pi$  des points a, b et c.

2). Une équation cartésienne du plan  $\mu$  contenant l'arête oc et perpendiculaire à l'arête ab.

3). Le point de percée de l'arête ab dans le plan  $\mu$ .

4). La distance du point o au plan  $\pi$ .

Jean-Pierre Verbeque