CS de mathématique en 6SM
le 18 juin 2004

1. a. Résolvez dans R: $\ln x - \ln 2 \leq \ln(1-3x)$.

On calcule successivement:

$\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \ln(1-3x)$ pcq ln est un morphisme qui transforme : en – ;

$\frac{x}{2} \leq 1-3x$ pcq ln est croissante, càd conserve l'ordre ; $x \leq \frac{2}{7}$

Mais il faut encore tenir compte des conditions d'existence de $\ln x$ et $\ln(1-3x)$ à savoir $x > 0$ et $x < \frac{1}{3}$.

Finalement: $S = \left]0, \frac{2}{7}\right]$.

1. b. Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de $f(x) = \ln\frac{2x-1}{x+1}$ au point d'abscisse 1.

On calcule $f'(x) = \frac{3}{(2x-1)(x+1)}$ et on applique la formule $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ pour $a=1$.

On obtient: $T \equiv y - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}(x-1)$ ou $T \equiv y = \frac{3}{2}x - \ln 2 - \frac{3}{2}$.

1. c. Calculez l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe X, la courbe d'équation $y = x \cdot \ln x$ et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

$$A = \int_e^{e^2} x \ln x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_e^{e^2} = \ldots = \frac{1}{4}\left(3e^4 - e^2\right) \cong 39{,}10$$

1. d. Développez la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ par la formule de Mac-Laurin et déduisez-en une série qui exprime ln2.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Pour trouver ln2, on remplace x par 1.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

1. e. Calculez $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{4x-1}$.

$$y=\lim_{+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{4x-1}$$

$$\ln y=\lim_{+\infty}(4x-1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)=\infty\cdot 0$$

$$\ln y=\lim_{+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right)}{\frac{1}{4x-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\underset{\text{Hospital}}{=}\ldots=\lim_{+\infty}\frac{-5(4x-1)^2}{-4(x+3)(x-2)}=\frac{5\cdot 16}{4}=20$$

$$y=e^{20}$$

1. f. Dérivez $y=(\ln x)^{e^x}$

On calcule successivement:

$$\ln y=e^x\cdot\ln(\ln x)$$

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln\ln x+e^x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=(\ln x)^{e^x}\cdot e^x\cdot\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{x\ln x}\right)$$

2. Une ellipse E, rapportée à ses axes, a des axes de longueurs 10 et 8.

2. a. Déterminez une équation cartésienne de E.

$$E \equiv \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

2. b. Calculez les coordonnées de ses foyers, les équations de ses directrices et son excentricité.

foyers: $(-3,0)$ et $(3,0)$; directrices: $x = \frac{-25}{3}$ et $x = \frac{25}{3}$; excentricité: $e = \frac{3}{5} = 0,6$.

2. c. Déterminez une équation cartésienne de sa tangente T en son point p d'abscisse 4 et d'ordonnée positive (précisez la méthode utilisée).

Le point de E d'abscisse 4 et d'ordonnée positive est le point $\left(4, \frac{12}{5}\right)$. La tangente demandée est la polaire de ce point c'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{12}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{3}{20} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 & -100 \end{pmatrix} \text{ (méthode matricielle)}$$

D'où: $T \equiv 16x + 15y - 100 = 0$.

2. d. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation de cette ellipse autour de l'axe X.

$$V = \pi \int f^2(x)dx = \pi \int_{-5}^{5} \frac{16}{25}\left(25 - x^2\right)dx = \ldots = \frac{320\pi}{3} \cong 335{,}103.$$

3. a. Calculez le déterminant de la matrice suivante et déterminez son rang en fonction des valeurs réelles de b: $\begin{pmatrix} 1-b & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 4-b \end{pmatrix}$.

Notons M cette matrice. $\text{dét}M = (b+2)(5b-8)$.

$\text{si } b \notin \left\{-2, \frac{8}{5}\right\}, \text{ alors } \text{dét}M \neq 0 \text{ et } \rho M = 3$

$\text{si } b \in \left\{-2, \frac{8}{5}\right\}, \text{ alors } \text{dét}M = 0 \text{ et } \rho M = 2 \text{ pcq } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$

3. b. Résolvez, discutez et interprétez géométriquement dans R^3 le système suivant: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+2ay+az=2 \\ 3x+(a+2)y+(a+1)z=9 \end{cases}$ (a est un paramètre réel).

Le déterminant de la matrice M du système égale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2a & a \\ 3 & a+2 & a+1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C2\backslash C2-C1 \\ C3\backslash C3-C1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2(a-1) & a-2 \\ 3 & a-1 & a-2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$$

Trois cas se présentent:

<u>Soit $a \neq 1$ et $a \neq 2$</u>. Alors le système est déterminé. Sa seule solution qui peut être calculée par la méthode de Cramer est le point $\left(\frac{4a-1}{a-1}, \frac{3}{1-a}, 0\right)$.
Les trois plans se coupent suivant un singleton.

<u>Soit $a = 1$</u>. Dans ce cas, le rang de M égale 2 et on aperçoit la combinaison L1 + L2 = L3 dans la matrice M. Comme les termes indépendants ne suivent pas cette combinaison puisque 4 + 2 ≠ 9, le système est impossible. Les trois plans se présentent dans l'espace comme un toblerone.

<u>Soit $a = 2$</u>. Le rang de M égale 2. $L3 = 2L1 + \frac{1}{2}L2$. Les TI suivent. Le système est simplement indéterminé. Les trois plans se coupent suivant une droite de vecteur directeur $(-1,0,1)$ et comprenant le point $(7,-3,0)$.

3. c. Dans R^3 équipé d'un repère orthonormé, on donne le tétraèdre de sommets $o = (0,0,0)$, $a = (4,0,0)$, $b = (0,3,0)$ et $c = (0,0,2)$.

Déterminez:

1). Une équation cartésienne du plan π des points a, b et c.

En constatant que le plus petit commun multiple de 2, 3 et 4 est 12, on n'a pas besoin de recourir à toute la théorie des plans, l'équation de π coule de source. C'est en effet $3x + 4y + 6z - 12 = 0$.

2). Une équation cartésienne du plan μ contenant l'arête oc et perpendiculaire à l'arête ab.

Ce plan μ étant perpendiculaire à la droite ab, son vecteur normal est un vecteur directeur de ab à savoir $(-4,3,0)$. Comme il passe par l'origine, son terme indépendant est nul et dès lors, $\mu \equiv -4x + 3y = 0$.

3). Le point de percée de l'arête ab dans le plan μ.

L'arête ab a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -4\lambda + 4 \\ y = 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ puisque son vecteur directeur est $(-4,3,0)$ et qu'elle passe par (4,0,0). Son intersection avec le plan μ se calcule dès lors aisément. Le point recherché est $\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}, 0\right)$.

4). La distance du point o au plan π.

Ce n'est pas pour des prunes que l'on a mémorisé la formule qui fournit la distance d'un point à un plan.. On l'applique donc, tout simplement, et on obtient:

$$d(o,\pi) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{9 + 16 + 36}} = \frac{12}{\sqrt{61}} \cong 1,536 .$$