le 15 décembre 2004

Une correction du CS allégé de mathématique en 5TD

I a. Ecrivez le nombre décimal illimité périodique 12,3<u>45</u>4545… sous forme de fraction irréductible à numérateur et dénominateur entiers.

$$12,3454545\ldots = \frac{123,454545\ldots}{10} = \frac{123+0,454545\ldots}{10} = \frac{123+\frac{45}{99}}{10} = \frac{123\cdot 99+45}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{679}{55}.$$

I b. Démontrez que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Rappelons d'abord les propositions suivantes :

prop 1. Tout nombre naturel s'écrit d'une et d'une seule manière (à l'ordre près) comme produit de facteurs premiers.

prop 2. Tout carré de naturel a une décomposition en facteurs premiers qui comporte un nombre pair de facteurs.

Et passons maintenant à la démonstration demandée.

Il faut démontrer que: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons le contraire càd $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{N}$.

On déduit facilement: $2 \cdot b^2 = a^2$ … ce qui est absurde.
En effet:

- la décomposition de a^2 en facteurs premiers comporte un nombre pair de facteurs (prop. 2)
- la décomposition de $2 \cdot b^2$ en facteurs premiers comporte un nombre impair de facteurs car 2 est premier et (prop. 2)
- $2 \cdot b^2$ et a^2 représentent le même nombre (car égaux) qui suivant (prop 1) n'admet qu'une seule décomposition en facteurs premiers.

Donc notre supposition est fausse et $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel. ■

I c. Prouvez que le nombre réel $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

Soulignons d'abord les rappels que voici:
des nombres sont inverses (l'un de l'autre) ssi leur produit égale 1

Ainsi: 0,25 est l'inverse de 4 et … 4 est l'inverse de 0,25

$\frac{1}{a}$ est une écriture qui représente l'inverse du nombre réel a

Ainsi: $\frac{1}{0,25} = 4$; $\frac{1}{4} = 0,25$ et $\frac{1}{0}$ représente l'inverse de 0.

Mais 0 n'a pas d'inverse puisque le produit de tout nombre avec 0 égale 0 (et non 1).

Donc $\frac{1}{0}$ n'existe pas.

II a. Définissez complètement *relation d'ordre* en langue française et dans le langage symbolique des mathématiciens.

Voici un ensemble E et une relation $\Re$ définie dans E.

$\Re$ est une relation d'ordre sur E

$$\text{ssi}\quad \begin{array}{l} \forall x \in E : x\Re x \text{ ($\Re$ est réflexive sur E)} \\ \forall x,y \in E : x\Re y \text{ et } y\Re x \Rightarrow x = y \text{ ($\Re$ est antisymétrique sur E)} \\ \forall x,y,z \in E : x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z \text{ ($\Re$ est transitive sur E)} \end{array}$$

$$\text{ssi}\quad \begin{array}{l} \text{une boucle en chaque point} \\ \text{pas d'aller-retour entre points distincts} \\ \text{chaque fois que "deux" flèches se suivent, une "troisième" fait le pont} \end{array}$$

II b. Définissez la relation *divise* dans $\mathbb{N}$ et démontrez qu'elle est transitive et non symétrique.

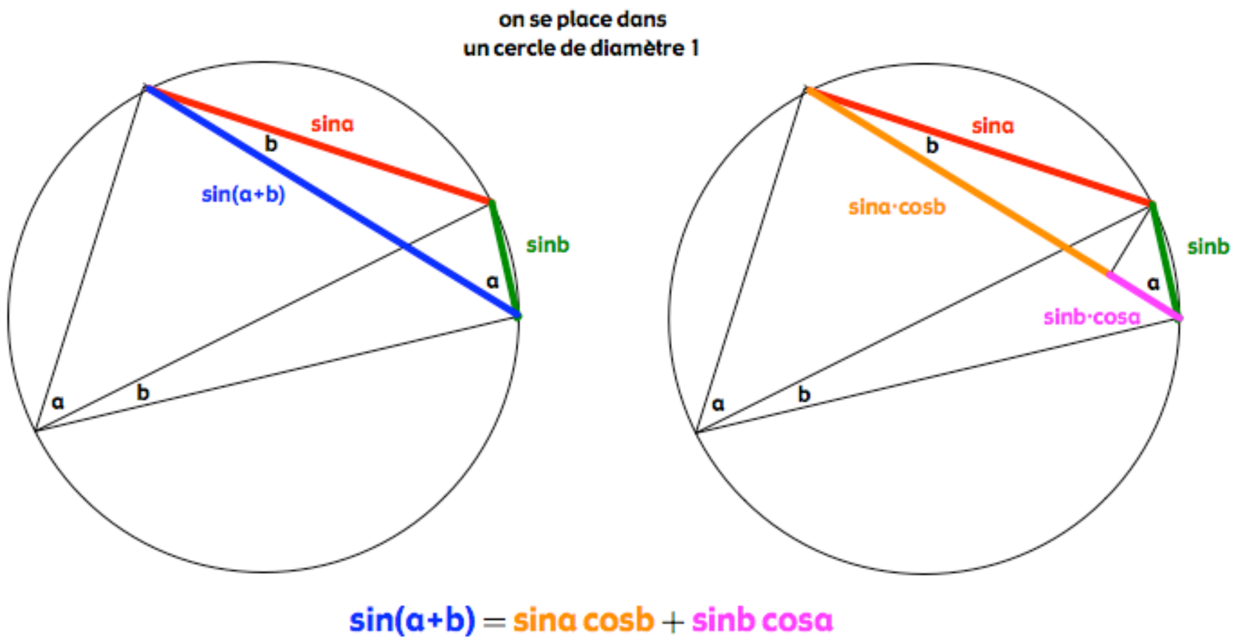
Définition: $\forall a,b \in \mathbb{N} : a|b$ ssi $\exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a = b$.
Rem: $a|b$ se lit *a divise b*.
EX: 3 divise 6 mais 3 ne divise pas 5, 7 divise 0 mais 0 ne divise pas 7. Par contre 0 divise 0.

Démontrons que | est transitive càd que $\forall a,b,c \in \mathbb{N} : a|b \text{ et } b|c \Rightarrow a|c$.
$\rhd\ a,b,c \in \mathbb{N} : a|b \text{ et } b|c.$
$*\ \exists m,n \in \mathbb{N} : m \cdot a = b \text{ et } n \cdot b = c$ (car a divise b et …)
D'où $c = n \cdot b = n \cdot ma = nm \cdot a$ avec $nm \in \mathbb{N}$.
Et $a|c$.
Enfin, | n'est pas symétrique car 3 divise 6 mais 6 ne divise pas 3.

II c. Voici l'ordonné $(\mathbb{R},\le)$ et sa partie $A = [2,5[$ 1. Prouvez que A n'a pas de maximum. 2. Déterminez minA, majA, mijA, supA, infA.

A n'a pas de maximum parce que $\forall x \in A, \exists y \in A : y > x$. Par exemple $y = \dfrac{x+5}{2}$.
On vérifie facilement par des calculs élémentaires que $y \in A$ (càd $y \ge 2$ et $y < 5$) et que $y > x$.
minA = 2 pcq $2 \in A$ et $\forall x \in A : 2 \le x$.
majA = $[5,\rightarrow[$ pcq x est supérieur à tous les éléments de A ssi x ≥ 5.
mijA = $]\leftarrow,2]$ pcq x est inférieur à tous les éléments de A ssi x ≤ 2.
supA = 5 pcq 5 = min majA
et infA = 2 pcq 2 = max mijA.

III a. Etablissez l'identité qui exprime le sinus d'une somme de deux angles.



Pour être complet, il faut préciser

- que le sinus d'un angle, c'est la corde de l'angle quand celui-ci est placé avec son sommet sur le bord d'un cercle de diamètre 1
- et que si l'on considère un cercle de rayon R et de centre O dans un système d'axes orthonormé, tout rayon OP formant un angle ß $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec l'axe des X se projette sur l'axe des X suivant un segment de longueur Rcosß.(C'est Thalès qui arrange les bidons).

III b. Sachant que $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < a < 180°$ et $270° < b < 360°$ calculez $\cos(a+b)$, $\sin 2a$ et $\cos 2b$.

Sachant que

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

et que sina et cosb sont donnés, il suffit de calculer sinb et cosa et ensuite d'injecter toutes ces valeurs dans les formules. Elémentaire!

III c. Verifiez l'identité $\text{séc}2a = \frac{\text{cotg}^2 a + 1}{\text{cotg}^2 a - 1}$.

$$\frac{\text{cotg}^2 a + 1}{\text{cotg}^2 a - 1} = \frac{\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin^2 a}}{\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin^2 a}} = \frac{1}{\cos 2a} = \sec 2a.$$

Jean-Pierre Verbeque