le 13 décembre 2004

Une correction du CS allégé de mathématique en 5TB-TC

1. Les nombres

a. Définissez la notion de *nombre premier* en vous référant au sens du mot "premier".

La notion de nombre premier nous vient des Pythagoriciens (environ 570 à 500 ACN). Alors qu'ils avaient une parfaite connaissance du 1 (un), ils considéraient cependant que 1 n'était pas un nombre. Les nombres naturels "commençaient" donc à 2. En examinant les listes des multiples des nombres naturels, ils constatèrent que 2 est premier de liste et absent des autres listes; idem pour 3; 4 n'est pas seulement premier de liste car présent dans la liste de 2; 5 est premier; 6 n'est pas premier car dans la liste de 2 et dans la liste de 3: etc…
Nous pouvons donc définir
Un naturel supérieur à 2 est premier ssi il n'est multiple naturel d'aucun de ses prédécesseurs ssi on le retrouve seulement en première position dans une des listes des multiples des naturels.
Notons encore que le 0 (zéro) n'existait pas dans le monde gréco-romain. Originaire d'Inde, il nous a été transmis par les Arabes vers 1200 PCN. Observons aussi que si 1 était premier, il serait le seul nombre premier.

b. Démontrez que la racine carrée de tout nombre premier est un nombre irrationnel.

Rappelons d'abord les propositions suivantes :

prop 1. Tout nombre naturel s'écrit d'une et d'une seule manière (à l'ordre près) comme produit de facteurs premiers.

prop 2. Tout carré de naturel a une décomposition en facteurs premiers qui comporte un nombre pair de facteurs.

Et passons maintenant à la démonstration demandée.

Voici p un nombre premier.
Il faut démontrer que: $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

Supposons le contraire càd $\sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{N}$.

On déduit facilement: $p \cdot b^2 = a^2$ … ce qui est absurde.
En effet:

- la décomposition de a^2 en facteurs premiers comporte un nombre pair de facteurs (prop. 2)
- la décomposition de $p \cdot b^2$ en facteurs premiers comporte un nombre impair de facteurs car p est premier et (prop. 2)
- $p \cdot b^2$ et a^2 représentent le même nombre (car égaux) qui suivant (prop 1) n'admet qu'une seule décomposition en facteurs premiers.

Donc notre supposition est fausse et $\sqrt{p}$ est bien un nombre irrationnel. ■

2. Ensembles ordonnés

a. Définissez complètement *relation d'ordre*, en langue française et dans le langage symbolique des mathématiciens.

Voici un ensemble E et une relation $\Re$ définie dans E.

$\Re$ est une relation d'ordre sur E

$$\text{ssi}\quad\begin{cases}\forall x \in E : x\Re x \text{ ($\Re$ est réflexive sur E)}\\ \forall x, y \in E : x\Re y \text{ et } y\Re x \Rightarrow x = y \text{ ($\Re$ est antisymétrique sur E)}\\ \forall x, y, z \in E : x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z \text{ ($\Re$ est transitive sur E)}\end{cases}$$

$$\text{ssi}\quad\begin{cases}\text{une boucle en chaque point}\\ \text{pas d'aller} - \text{retour entre points distincts}\\ \text{chaque fois que "deux" flèches se suivent, une "troisième" fait le pont}\end{cases}$$

b. Voici l'ensemble $E = \{0,1,2\}$ et la partie $A = \{\{0\},\{0,1\},\{0,2\}\}$ de l'ensemble $\wp(E)$ des parties de E. Dans l'ordonné $(\wp(E),\subset)$, déterminez maxA, minA, majA, mijA, supA et infA et justifiez vos réponses.

maxA n'existe pas car aucun élément de A ne contient tous les éléments de A.
minA = $\{0\}$ car $\{0\} \in A$ et $\{0\}$ est inclus à tous les éléments de A.
majA = $\{E\}$ car E est le seul élément de $\wp(E)$ contenant tous les éléments de A.
mijA = $\{\varnothing,\{0\}\}$ car $\varnothing$ et $\{0\}$ sont les seuls éléments de $\wp(E)$ inclus à tous les éléments de A.
supA = E car E étant le seul élément de majA, il en est le plus petit.
infA = $\{0\}$, le plus grand des minorants.

3. Trigonométrie

a. Vérifiez l'identité $\dfrac{\text{cotg}a - 1}{\text{cotg}a + 1} = \dfrac{1 - \sin 2a}{1 - 2\sin^2 a}$.

On calcule:

$$\frac{\text{cotg}a - 1}{\text{cotg}a + 1} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\sin a}}{\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\sin a}} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a} \quad \text{(définition de cotg et calcul élémentaire)}$$

$$= \frac{(\cos a - \sin a)^2}{\cos^2 a - \sin^2 a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a - 2\sin a \cos a}{1 - \sin^2 a - \sin^2 a} \quad \text{(on a multiplié N et D par (cosa - sina))}$$

$$= \frac{1 - \sin 2a}{1 - 2\sin^2 a} \quad \text{(formule fondamentale et formule de duplication).} \quad \blacksquare$$

b. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$
et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

On pose $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et donc $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$.

L'équation se transforme alors en $\cos\varphi + \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin x = 1$.

En remplaçant $\operatorname{tg}\varphi$ par $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ et en multipliant le tout par $\cos\varphi$ on obtient :

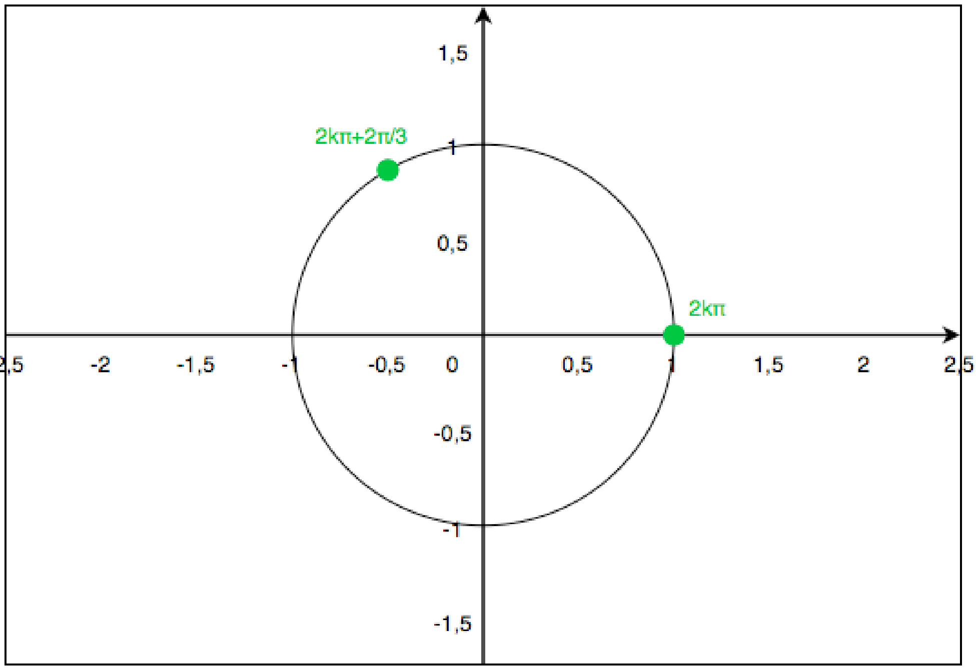
$\cos x \cos\varphi + \sin x \sin\varphi = \cos\varphi$

ou encore $\cos(x - \varphi) = \cos\varphi$ qui est une équation élémentaire

dont les solutions sont données par $x - \varphi = 2k\pi \pm \varphi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Finalement, en remplaçant φ par sa valeur, les solutions de l'équation proposée s'écrivent :

$x = 2k\pi$ ou $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et se dessinent :



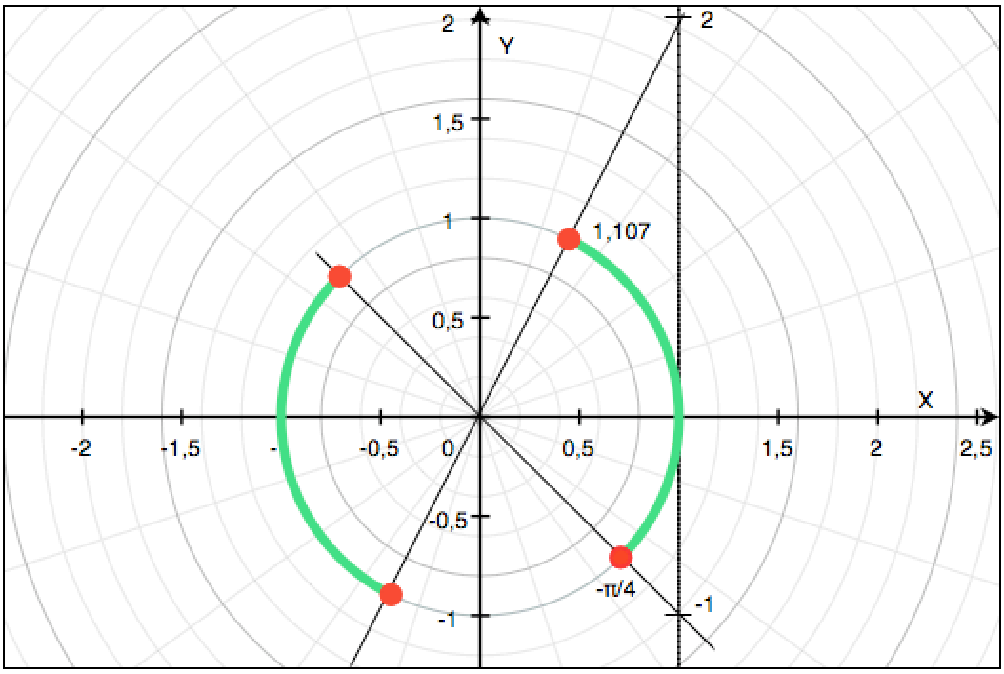
c. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x > 0$
et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

$\cos x = 0$ ne fournit pas de solution de cette inéquation, je peux donc la diviser par $\cos^2 x$, qui est strictement positif, sans changer le sens de l'inégalité.

J'obtiens ainsi l'inéquation $2 + \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^2 x > 0$ qui est équivalente à $-1 < \operatorname{tg}x < 2$.

Ses solutions sont: $x = k\pi + \alpha$ avec $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 1{,}107$ et $k \in \mathbb{Z}$.

La représentation des solutions est faite à la page suivante:



d. Etablissez la formule de $\sin a + \sin b$.

Etant donnés deux réels a et b, il est toujours possible de trouver des nombres r et s dont la somme égale a et la différence b.
Voici r et $s \in \mathbb{R}$ tels que $r + s = a$ et $r - s = b$.

On constate immédiatement que $r = \dfrac{a+b}{2}$ et $s = \dfrac{a-b}{2}$.

Calculons: $\sin a + \sin b = \sin(r+s) + \sin(r-s) = \sin r \cos s + \cos r \sin s + \sin r \cos s - \cos r \sin s$

$= 2\sin r \cos s = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ ■

Jean-Pierre Verbeque