Question 1 : SYSTEMES LINEAIRES

Résolvez dans R^3, discutez et interprétez géométriquement le système suivant :

$$\begin{cases} x+ky+z=2k \\ x+ky+(k+1)z=k \\ kx+y+z=0 \end{cases} \quad \text{(k est un paramètre réel)}$$

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k & k+1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ dét } \mathcal{M}=k(k-1)(k+1) \text{ et dét } \mathcal{M}=0 \text{ ssi } k\in\{-1,0,1\}$$

1er cas: $k\notin\{-1,0,1\}$

Le système est déterminé.

Son unique solution est le point $\left(\frac{1}{1-k},\frac{2k-1}{k-1},-1\right)$.

Les trois plans se coupent suivant un singleton.

2ème cas: $k=-1$

$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$. La troisième ligne de $\mathcal{M}$ est combinaison linéaire des deux premières, en effet $L_3=L_1-2L_2$, et les termes indépendants suivent cette C.L.

Le système est simplement indéterminé et les trois plans se coupent suivant la droite $S=\{(\lambda-1,\lambda,1)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ comprenant le point $(-1,0,1)$ et de vecteur directeur $(1,1,0)$.

3ème cas: $k=0$

Le système devient $\begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$. Il est visiblement constitué de deux plans confondus et d'un plan qui les coupe. Il est donc simplement indéterminé et sa droite de solutions est la droite vectorielle $S=\{(-\lambda,-\lambda,\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ de vecteur directeur $(-1,-1,1)$.

4ème cas: $k=1$

Le système devient $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+2z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. A l'oeil nu on voit qu'il est constitué de deux plans parallèles et d'un troisième qui les coupe. Le système des donc impossible et $S=\varnothing$.

En résumé:

k		-1		0		1	
genre du système	D	SI	D	SI	D	I	D

Légende: D = déterminé, SI = simplement indéterminé, I = impossible.

Question 2 : LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES DE BASE QUELCONQUE

A. Résolvez dans R : $\log_2\left(2^x-1\right)+x=\log_4 144$

Observons d'abord que $\log_4 144=\dfrac{\log_2 144}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 12^2=\log_2 12$ et que $x=\log_2 2^x$.

L'équation devient : $\log_2\left(2^x-1\right)+\log_2 2^x=\log_2 12$

Et on calcule successivement:

$$\log_2 2^x\left(2^x-1\right)=\log_2 12 \;\;;\;\; 2^x\left(2^x-1\right)=12$$

$$\left(2^x\right)^2-2^x-12=0 \;\;;\;\; 2^x=\frac{1\pm 7}{2}=4 \text{ ou } -3$$

-3 est à rejeter car les fonctions exponentielles sont à valeurs strictement positives.
Donc $2^x=4$ et $\boxed{x=2}$

B. Calculez : $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx \underset{\substack{\text{binôme}\\\text{conjugué}}}{=} \int\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\cot g x+\frac{1}{\sin x}+k=\text{coséc}x-\cot g x+k$$

Ou plus court:

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx \underset{\text{CARNOT}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\text{tg}\frac{x}{2}+k$$

Question 3 : CONIQUES

Une ellipse E, rapportée à ses axes, a des axes de longueurs 12 et 6.
a. Déterminez une équation cartésienne de E.
b. Calculez les coordonnées de ses foyers, les équations de ses directrices et son excentricité.
c. Déterminez une équation cartésienne de sa tangente T en son point p d'abscisse 4 et d'ordonnée positive (précisez la méthode utilisée).
d. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation de cette ellipse autour de l'axe X.

a. $E \equiv \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

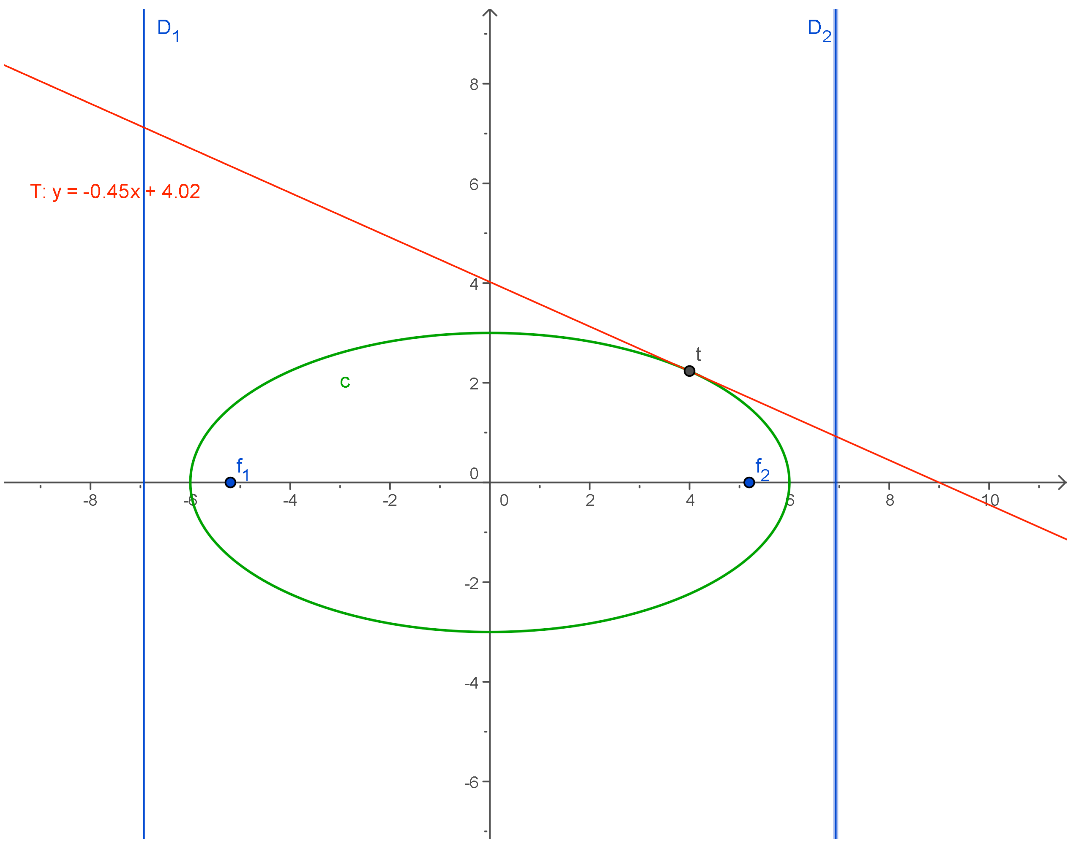
b. $f_1 = \left(-3\sqrt{3}, 0\right)$ et $f_2 = \left(3\sqrt{3}, 0\right)$; $D_1 \equiv x = -4\sqrt{3}$ et $D_2 \equiv x = 4\sqrt{3}$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c. Le point de tangence $= \left(4, \sqrt{5}\right)$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{\sqrt{5}}{9} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & -9 \end{pmatrix}$$

$T \equiv x + \sqrt{5}\, y - 9 = 0$ ou encore $T \equiv y = -0{,}45x + 4{,}02$

d. $V = \frac{4}{3}\pi a b^2 = 72\pi$



Question 4 : LIEUX GEOMETRIQUES

A. Déterminez le lieu des points du plan dont la somme des carrés des distances à deux points fixes égale le carré de la distance de ces deux points.

▶ p et q les points fixes
▶ $a \in \mathbb{R}_0^+ : d(p,q) = 2a$

Choix du repère: l'axe X passe par p et q; l'origine o = le milieu de $[p,q]$

✱ $p = (-a,0)$ et $q = (a,0)$

Le lieu des points recherchés égale

$$L = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \middle| d^2(v,p) + d^2(v,q) = d^2(p,q) \right\}$$

$$L = \left\{ (x,y) \middle| d^2\big((x,y),(-a,0)\big) + d^2\big((x,y),(a,0)\big) = (2a)^2 \right\}$$

Développons la condition de définition de L:

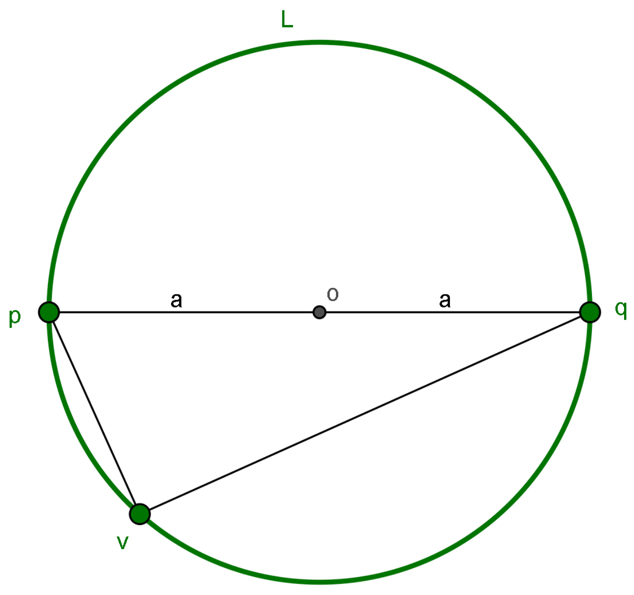
$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = 4a^2$$

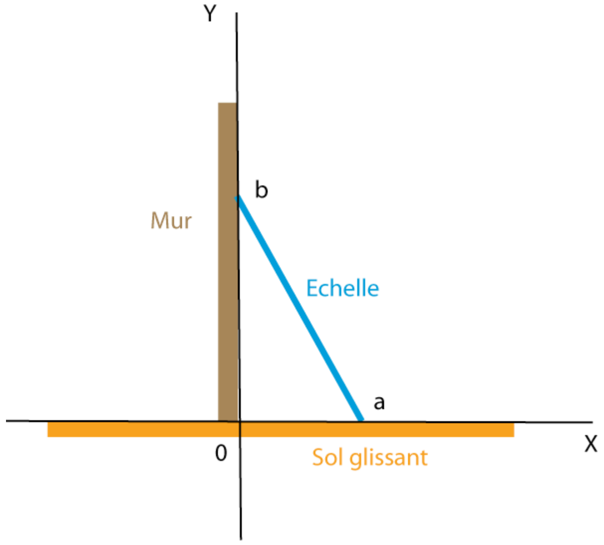
d'où $L \equiv x^2 + y^2 = a^2$

En conclusion :

L est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon a, c'est-à-dire le cercle passant par les deux points fixes et dont le centre est le milieu de ces deux points.



B. Une échelle de longueur d, appuyée contre un mur vertical, glisse sur le sol.
Quel est le lieu du milieu de cette échelle ?



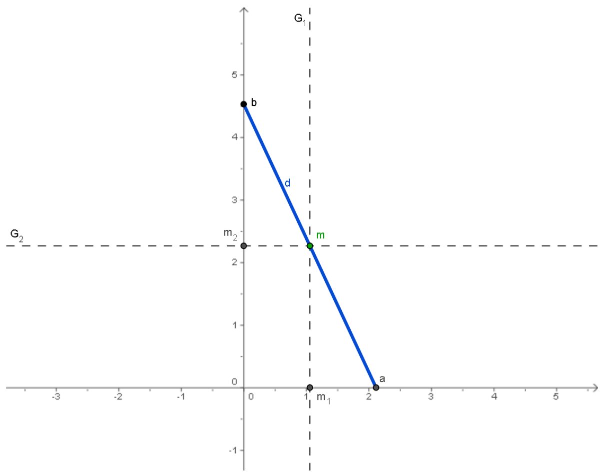
Choix du repère:
axe X = le sol, axe Y = le mur

▶ a et b les points de contact de l'échelle avec le sol et le mur respectivement.

▶ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+ : a = (2\alpha, 0)$ et $b = (0, 2\beta)$

✱ $(2\alpha)^2 + (2\beta)^2 = d^2$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{d^2}{4}$$



Le milieu de l'échelle est obtenu par deux génératrices:

G_1 = la médiatrice de $[o, a]$

G_2 = la médiatrice de $[o, b]$

$$\begin{cases} G_1 \equiv x = \alpha \\ G_2 \equiv y = \beta \end{cases}$$

Eliminons les paramètres α et β afin d'obtenir l'équation du lieu.

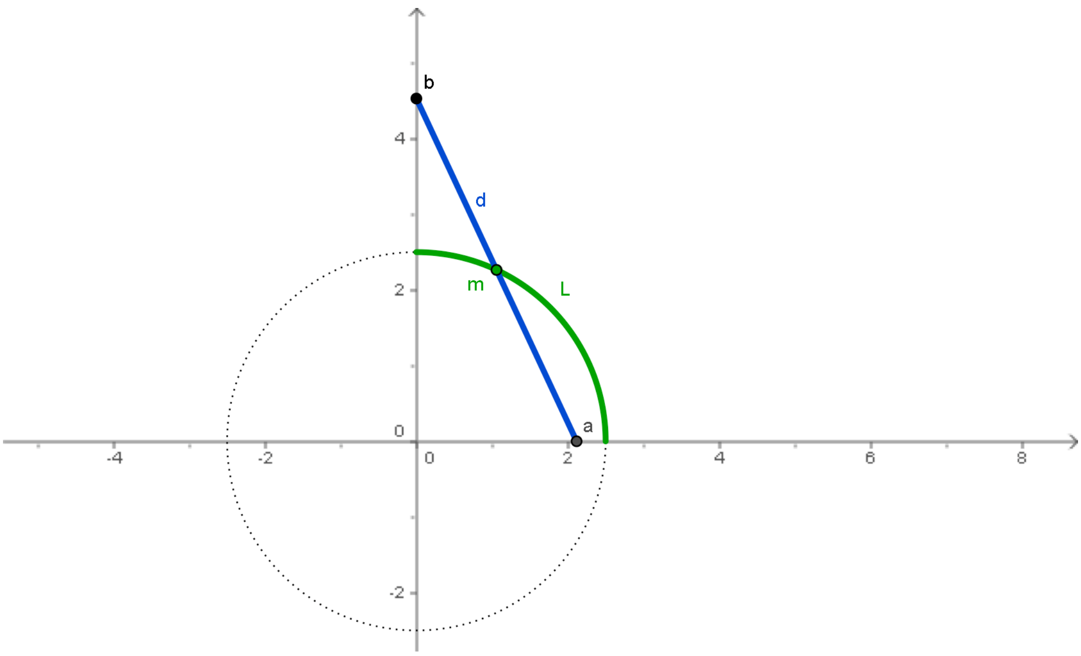
$$x^2 + y^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$\boxed{L \equiv x^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}}$$

Les calculs nous fournissent ainsi l'équation du cercle de centre (0,0) et de rayon $\dfrac{d}{2}$

Interprétation du résultat

page suivante



Visiblement, l'échelle glissant dans "le premier quadrant", le lieu proprement dit se réduit au quart de cercle dont le centre est le pied du mur et dont le rayon égale la moitié de la longueur de l'échelle.