Votre nom :

Votre classe :

CS de mathématique du 19 juin 2006

Consignes :

- Veuillez compléter avec soin le questionnaire que voici.
- Ne dégrafez les feuilles en aucun cas.
- Si vous manquez d'espace pour développer les calculs, vous pouvez utiliser le verso de la feuille précédente.
- Une calculette est autorisée pour un usage strictement personnel.
- Comme feuilles de brouillon, vous ne pouvez utiliser que des feuilles à en-tête du Collège.
- Chaque question est articulée autour des trois compétences propres au cours de mathématique, à savoir : restituer, comprendre, appliquer.
- Le CS doit être terminé à 11h30.

Cadre réservé au professeur :

	Question 1	Question 2	Question 3
Restituer			
Comprendre			
Appliquer			

Bon travail

Jean-Pierre Verbeque

Votre nom :

Votre classe :

Question 1 : LIMITES

A. Définissez dans un contexte adéquat : $\lim_{a} f = b$

Voici $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, $b \in \mathbb{R}$ et a un point
appartenant à domf mais non isolé dans domf
ou n'appartenant pas à domf mais adhérent à domf

La limite de f au point a égale b
ssi
b est la valeur au point a de la prolongée continue $\tilde{f}$ de f au point a.

B. Expliquez le contexte

D'un point de vue dynamique, la limite de f au point a égale b ssi f(x) tend vers b lorsque le point x du domaine de f tend vers a.

Or si a est un point du domaine, isolé dans le domaine, alors il n'est pas possible pour x de s'approcher de f.
De même, si a n'est pas dans le domaine et n'adhère pas au domaine, alors il est tout aussi impossible pour x de s'approcher de a

Illustration graphique :

a est isolé dans domf

a n'adhère pas à domf

C. Calculez

a) $\lim_{2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \ldots$ le premier essai donne $\frac{0}{0}$ qui est une forme d'indétermination.
Pour « lever » l'indétermination, il faut mettre (x - 2) en évidence au N et au D, simplifier et faire un deuxième essai. Calculons donc :

$$\lim_{2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 4} = \frac{10}{-2} = -5$$

Votre nom :

Votre classe :

Question 1 : LIMITES (suite)

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{x^2-6x+8}=\dfrac{0}{0}$ au premier essai.

Il faut multiplier N et D par le binôme conjugué de N, etc… (voir recettes de cuisine) :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{x^2-6x+8}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+(x+1)}{\sqrt{2x+5}+(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5-x^2-2x-1}{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{2x+5}+(x+1)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(x^2-4\right)}{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{2x+5}+(x+1)\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+5}+(x+1)\right)}=\frac{-4}{-2\cdot 6}=\frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)$ = en appliquant l'algorithme obligatoire …

étape 1 : $-\infty+\infty$ (ind)

étape 2 : $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}(-x)\left(-1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)=+\infty\cdot 0$ (ind)

étape 3 : $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-x^2-4x-3}{x-\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}=\dfrac{4}{2}=2$

d) $\lim\limits_{0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\lim_{0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\left(\lim_{0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=1^2=1$$

Votre nom :

Votre classe :

Question 2 : DERIVEES

A. Définissez dans un contexte adéquat : *dérivée de f au point a*.

voir cours

B. Développez une interprétation géométrique de la dérivée de f au point a

voir cours

C. Développez le calcul de la dérivée de la fonction sinx en un point a de son domaine

voir cours

D. Enoncez la formule de la dérivée d'une composée de fonctions et illustrez-la sur l'exemple que voici : $y = \sqrt{\sin x}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Considérons $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On a immédiatement : $f'(x) = \cos x$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Et en appliquant la formule : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Votre nom :

Votre classe :

Question 3 : VARIATIONS DE FONCTIONS

Réalisez une étude complète des variations de la fonction $f : R \to R, x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

1. Etude de f

$\mathrm{dom}f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$f \cap X = \varnothing$ $\qquad\qquad$ $f \cap Y = \left\{\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

$AV_1 \equiv x = -2$ et $AV_2 \equiv x = 2$ parce que …

$AH \equiv y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$ parce que …

AO : f n'a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà une AH en + l'infini et en – l'infini.

2. Etude de f'

$$f'(x) = \frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Tableau du signe de $f'(x)$

x		-2		0		2	
$-10x$	+	+	+	0	−	−	−
$\left(x^2-4\right)^2$	+	0	+	+	+	0	+
$f'(x)$	+	///	+	0	−	///	−

3. Etude de f''

$$f''(x) = \frac{10\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Tableau du signe de $f''(x)$

x		-2		2	
$10\left(3x^2+4\right)$	+	+	+	+	+
$\left(x^2-4\right)^3$	+	0	−	0	+
$f''(x)$	+	///	−	///	+

Votre nom :

Votre classe :

Question 3 : VARIATIONS DE FONCTIONS (suite)

4. Tableau général

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$+$	$///$	$+$	0	$-$	$///$	$-$
$f''(x)$	$+$	$///$	$-$	$-$	$-$	$///$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cup$	AV	$\nearrow$ $\cap$	Max $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$ $\cap$	AV	$\searrow$ $\cup$

5. Graphique