Une correction du CS de mathématique
du 19 juin 2006 en $5^{\text{ème}}$ année - 6h

Question 1 : LIMITES

A. Définissez dans un contexte adéquat : $\lim\limits_{a} f = b$

Voici $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, $b \in \mathbb{R}$ et a un point

appartenant à domf mais non isolé dans domf
ou n'appartenant pas à domf mais adhérent à domf

La limite de f au point a égale b
ssi

b est la valeur au point a de la prolongée continue $\tilde{f}$ de f au point a.

B. Expliquez le contexte

D'un point de vue dynamique, la limite de f au point a égale b ssi f(x) tend vers b lorsque le point x du domaine de f tend vers a.

Or si a est un point du domaine, isolé dans le domaine, alors il n'est pas possible pour x de s'approcher de f.
De même, si a n'est pas dans le domaine et n'adhère pas au domaine, alors il est tout aussi impossible pour x de s'approcher de a

Illustration graphique :

C. Calculez

a) $\lim\limits_{2} \dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \ldots$ le premier essai donne $\dfrac{0}{0}$ qui est une forme d'indétermination.
Pour « lever » l'indétermination, il faut mettre (x - 2) en évidence au N et au D, simplifier et faire un deuxième essai. Calculons donc :

$$\lim_{2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 2)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 4} = \frac{10}{-2} = -5$$

Question 1 : LIMITES (suite)

---

b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-(x+1)}{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+(x+1)}{\sqrt{2x+5}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5-x^2-2x-1}{5x-1-4x-1}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x+5}+(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(x^2-4\right)}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x+5}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}-\left(x+2\right)\frac{\sqrt{5x-1}+\sqrt{4x+1}}{\sqrt{2x+5}+(x+1)}=-4\cdot\frac{6}{6}=-\,4$$

---

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$ en appliquant l'algorithme obligatoire …

étape 1 : $-\infty+\infty$ (ind)

étape 2 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\left(-1+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty\cdot 0$ (ind)

étape 3 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-4x-3}{x-\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\dfrac{-\,4}{2}=-2$

---

d) $\lim\limits_{1}\dfrac{1-\cos^2\pi x}{(x-1)^2}=\dfrac{0}{0}$

soit par calcul direct :

$$\lim_{1}\frac{1-\cos^2\pi x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x-\pi)}{(x-1)^2}=\lim_{x-1\to 0}\frac{\sin^2\pi(x-1)}{\pi^2(x-1)^2}\pi^2$$

$$=\pi^2\lim_{\pi(x-1)\to 0}\left(\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right)^2=\pi^2\left(\lim_{\pi(x-1)\to 0}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right)^2=\pi^2 1^2=\pi^2$$

soit par la règle de l'Hospital (appliquée deux fois de suite) :

$$\lim_{1}\frac{1-\cos^2\pi x}{(x-1)^2}=\lim_{1}\frac{-2\cos\pi x\ (-\sin\pi x)\ \pi}{2(x-1)}=\lim_{1}\frac{\pi\ \sin 2\pi x}{2(x-1)}=\lim_{1}\frac{\pi\ (\cos 2\pi x)2\pi}{2}=\frac{2\pi^2\cos 2\pi}{2}=\pi^2$$

Question 2 : DERIVEES

A. Définissez dans un contexte adéquat : *dérivée de f au point a*.

voir cours

B. Développez une interprétation géométrique de la dérivée de f au point a

voir cours

C. Détaillez le calcul de la dérivée de la fonction sinx en un point a de son domaine

voir cours

D. Enoncez la formule de la dérivée d'une composée de fonctions et illustrez-la sur l'exemple que voici : $y = \sqrt{\sin x}$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Considérons $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

On a immédiatement : $f'(x) = \cos x$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Et en appliquant la formule : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Question 3 : VARIATIONS DE FONCTIONS

Réalisez une étude complète des variations de la fonction $f : R \to R, x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

1. Etude de f

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$f \cap X = \{(0,0)\}$ $\qquad$ $f \cap Y = \{(0,0)\}$

$AV_1 \equiv x = -1$ et $AV_2 \equiv x = 1$

Il n'y a pas d'AH parce que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

$AO \equiv y = x$ en $+\infty$ et en $-\infty$

2. Etude de f'

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

Tableau du signe de $f'(x)$

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 3$	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$\left(x^2 - 1\right)^2$	+	+		0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	−	/	−	0	+

3. Etude de f''

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

Tableau du signe de $f''(x)$

x		-1		0		1	
$2x$	−	−	−	0	+	+	+
$x^2 + 3$	+	+	+	+	+	+	+
$\left(x^2 - 1\right)^3$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	/	+	0	−	/	+

Question 3 : VARIATIONS DE FONCTIONS (suite)

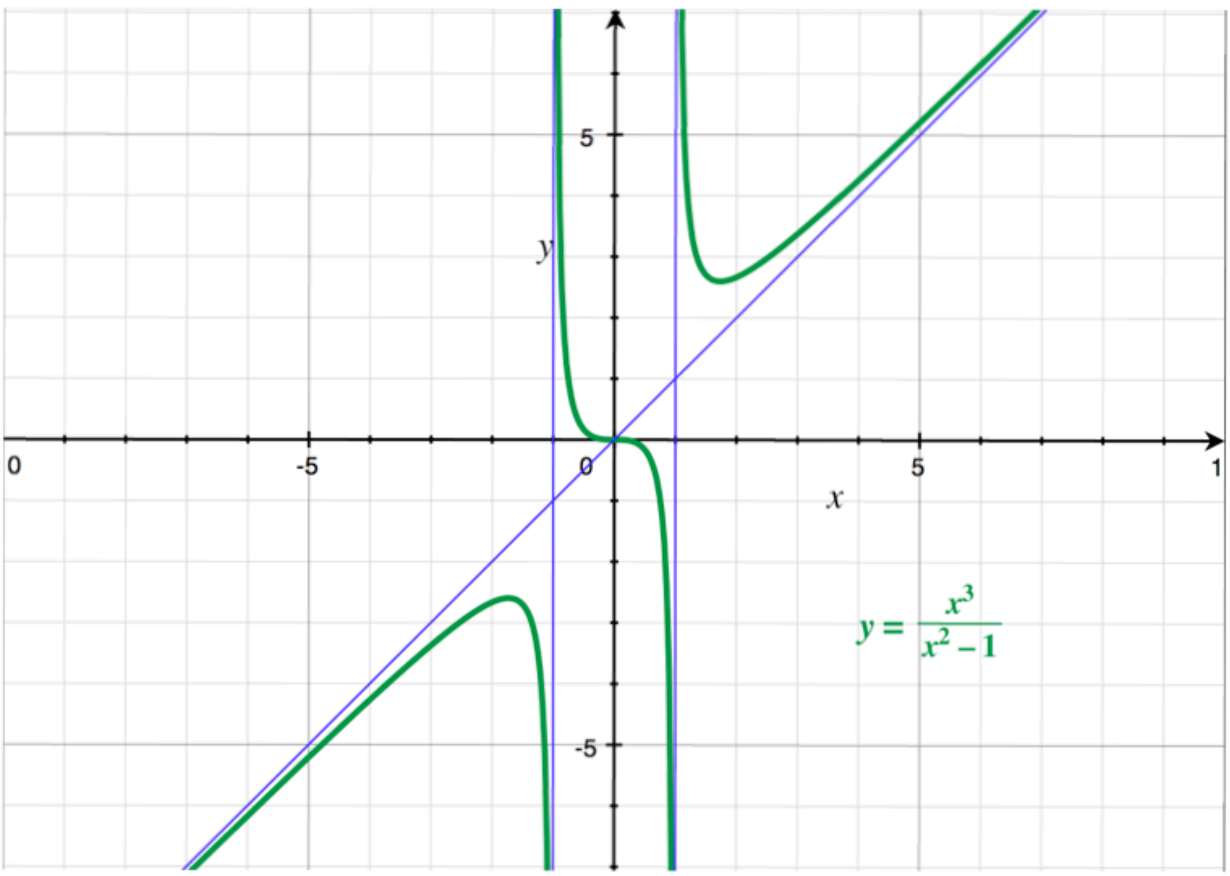
4. Tableau général

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	/	$+$	0	$-$	/	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	/	$-$	0	$-$	/	$-$	0	$+$	
$f(x)$	AO	$\cap$ $\nearrow$	$\cap$ M	$\cap$ $\searrow$	AV	$\cup$ $\searrow$	PI	$\cap$ $\searrow$		$\cup$ $\searrow$	$\cup$ m	$\cup$ $\nearrow$	AO

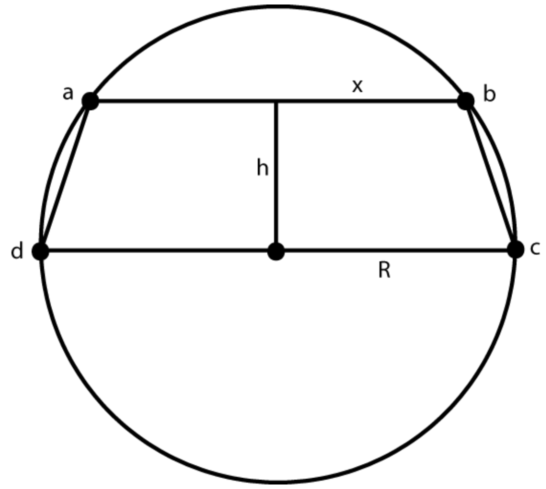
le maximum de f a pour coordonnée $\left(-\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cong (-1,73;-2,60)$

son minimum est le symétrique du maximum par rapport à l'origine des axes puisque la fonction f est impaire

5. Graphique



Question 4 : Optimisation



Quelles sont les dimensions (petite base ß et hauteur h) du trapèze d'aire maximale inscrit dans un cercle de rayon R comme sur le dessin ci-contre.
Remarques :

La grande base du trapèze est un diamètre du cercle; B = 2R.
Il est intéressant de choisir comme inconnue x la moitié de la petite base du trapèze; ß = 2x.

L'aire du trapèze = A = $(B+\beta)\frac{h}{2} = (2R+2x)\frac{h}{2} = (R+x)h$

Il y a deux inconnues dans l'expression de A : x et h. Heureusement, Pythagore vient à notre rescousse avec $h^2 + x^2 = R^2$. On en déduit $h = \sqrt{R^2 - x^2}$ et dès lors, l'aire A s'exprime en fonction de la seule inconnue x.

$A(x) = (R+x)\sqrt{R^2 - x^2}$

Cette aire doit être maximale, on calcule donc sa dérivée et on regarde pour quelles valeurs de x cette dérivée s'annule.

$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{(R+x)(-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \ldots = \frac{-2x^2 - Rx + R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$-2x^2 - Rx + R^2 = 0$ ssi $x = \frac{R}{2}$ ou $x = -R$

C'est bien $x = \frac{R}{2}$ qui donne une valeur maximale à A. Il suffit de réfléchir un peu pour s'en apercevoir. On peut aussi faire une étude du signe de A'(x) et arriver à la même conclusion.

Dès lors, ß = R et $h = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

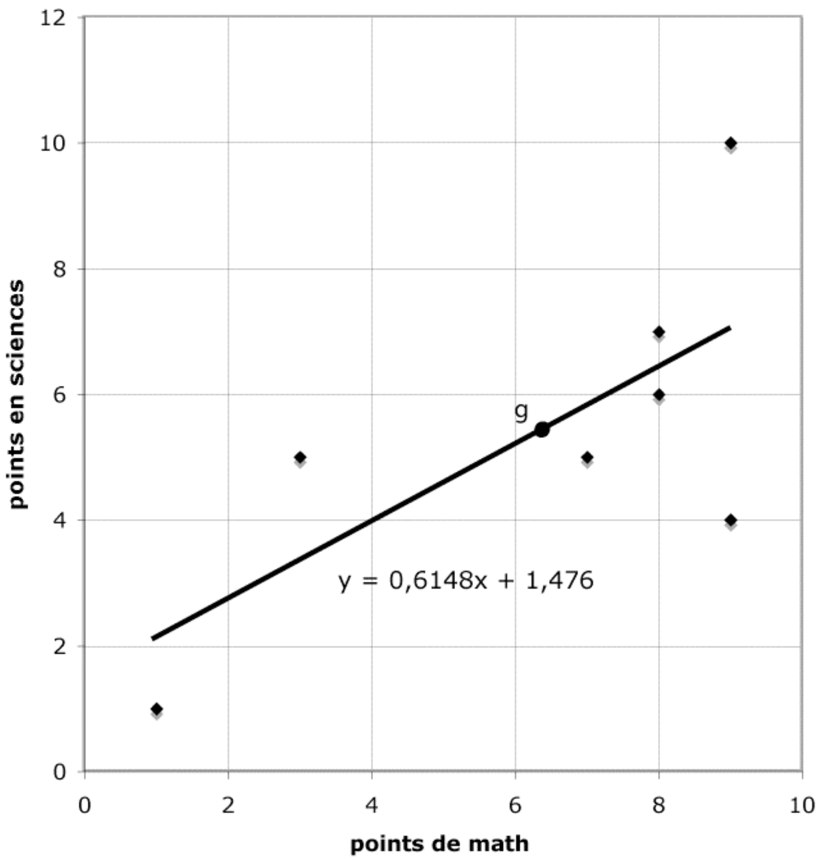
On constate que le trapèze d'aire maximale recherché est le demi-hexagone régulier inscrit au cercle de rayon R.

Question 5 : Ajustement linéaire d'un nuage statistique

Voici les résultats obtenus en math et en sciences par les élèves d'une classe de sixième :

Elève n°	1	2	3	4	5	6	7
Math	3	8	9	7	8	1	9
Sciences	5	6	10	5	7	1	4

1. Faites un graphe cartésien représentant les points dont l'abscisse est le résultat obtenu en math et l'ordonnée le résultat obtenu en sciences par chaque élève.



2. Le nuage de points obtenu est-il le graphe d'une fonction ? Justifiez.

   NON, parce que le point d'abscisse 8 a deux images

3. Calculez le point moyen ou barycentre de ce nuage et représentez-le sur le graphe du verso.

   $g = (\bar{x}, \bar{y}) = (6{,}429\ ;\ 5{,}429)$

Question 5 : Ajustement linéaire d'un nuage statistique (suite)

4. Déterminez l'équation cartésienne (sous la forme y = px + q) de la droite de régression de y par rapport à x et représentez-la sur le graphe de la page précédente.

   $y = 0{,}615x + 1{,}476$

5. Calculez l'écart-type σ_m des points de math et celui σ_s des points de sciences.

   $\sigma_m = 2{,}921$ et $\sigma_s = 2{,}556$

6. Déterminez le coefficient de corrélation entre math et sciences et tirez-en une conclusion.

   $r = 0{,}703$

   Conclusion : la corrélation est faible parce que r est éloigné de -1 et de 1.

Détail des calculs :

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
3	5	-3,4286	-0,4286	11,7551	0,1837	1,4693
8	6	1,5714	0,5714	2,4694	0,3265	0,8980
9	10	2,5714	4,5714	6,6122	20,8981	11,7551
7	5	0,5714	-0,4286	0,3265	0,1837	-0,2449
8	7	1,5714	1,5714	2,4694	2,4694	2,4694
1	1	-5,4286	-4,4286	29,4694	19,6121	24,0407
9	4	2,5714	-1,4286	6,6122	2,0408	-3,6734
$\bar{x}$ = 6,4286	$\bar{y}$ = 5,4286			Σ=59,7143	Σ=45,7143	Σ=36,7143

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{36{,}7143}{59{,}7143} \cong 0{,}6148 \quad \text{(pente de la droite de régression)}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{59{,}7143}{7}} \cong 2{,}9207$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{45{,}7143}{7}} \cong 2{,}5555$$

$$r = p\frac{\sigma_m}{\sigma_s} = \frac{0{,}6148 \cdot 2{,}9207}{2{,}5555} \cong 0{,}703$$