1a. Déterminez l'équation cartésienne du plan de R^3 passant par les points (1,2,3), (0,0,6) et (5,1,0).

L'équation demandée s'obtient sans le moindre calcul puisque les trois points ont la somme de leurs coordonnées égale à 6. L'équation s'écrit donc: $x + y + z = 6$

1b. Déterminez une équation cartésienne du plan ζ comprenant le point p et parallèle au plan η :

$$p = (1,3,-2) \text{ et } \eta = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 1 + 3\mu \end{cases}.$$

ζ comprend p et a les mêmes vecteurs directeurs que η (car parallèle à η).

Dès lors $\zeta \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = -2 + 4\lambda + 3\mu \end{cases}$ et il suffit d'éliminer les paramètres pour obtenir l'équation cartésienne demandée: $\zeta \equiv 11x + 13y - 5z = 60$

1c. Déterminez une équation cartésienne du plan θ orthogonal à la droite D et comprenant le point p:

$$p = (3,2,-1) \text{ et } D \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda + 2 \\ z = 5 \end{cases}.$$

θ étant orthogonal à D, le vecteur normal de θ égale le vecteur directeur de D, à savoir $(-1,1,0)$.
Dès lors, θ a pour équation $-x + y + \ldots = 0$
En tenant compte de l'appartenance de p à θ, on calcule: $-3 + 2 + \ldots = 0$.
Il faut donc mettre 1 à la place du pointillé.
On conclut: $\theta \equiv -x + y + 1 = 0$

1d. Résolvez le système d'équations suivant par la méthode de Cramer:

$$\begin{cases} 8x + 4y - z = 2 \\ y + z = 1 \\ 4x - 5y + z = 11 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 68,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 68,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix} = -68, \Delta_z = 136.$$

Par conséquent: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$; $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -1$; $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = 2$ et $S = \{(1,-1,2)\}$.

2a. Déterminez le terme en x^3 de $\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$

Le terme général du binôme proposé s'écrit: $C_{12}^{i}(3x)^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^{12-i}=C_{12}^{i}3^i x^{3i-24}$.

Le terme en x^3 s'obtient pour i = 9.
Il se calcule donc aisément: $C_{12}^{9}3^9x^3=220\cdot 19683\ x^3=4330260x^3$

2b. On tire, sans remise, 2 cartes d'un jeu bien mélangé de 32 cartes. Quelle est la probabilité que:
1) la deuxième carte soit une dame si la première est un coeur?
2) la deuxième carte soit un coeur si la première est une dame?

La catégorie d'épreuve Ω égale l'ensemble des couples (carte, carte) dont il faut exclure les couples identiques puisque les tirages se font SANS REMISE.
Il y a 32*32 couples (carte, carte) et 32 couples (carte, même carte).
Dès lors, $\#\Omega = 32*32-32=32*31$
Appelons D1 l'événement "la 1ère carte est une dame", D2 l'événement "la 2ème carte est une dame", C1 l'événement "la 1ère carte est un coeur", C2 l'événement "la 2ème carte est un coeur"

On demande de calculer $P(D2|C1)$ et $P(C2|D1)$.

$D2\cap C1$ = l'ensemble des couples (coeur, dame) moins le couple (dame de coeur, dame de coeur)
$\#(D2\cap C1)=8*4-1=31$
C1 = l'ensemble des couples (coeur, carte)
moins l'ensemble des couples identiques (coeur, même coeur)
$\#C1=8*32-8$ ou $8*31$ (= 248)
$C2\cap D1$ = l'ensemble des couples (dame, coeur) moins le couple (dame de coeur, dame de coeur)
$\#(C2\cap D1)=4*8-1=31$
D1 = l'ensemble des couples (dame, carte) moins l'ensemble des couples (dame, même dame)
$\#D1=4*32-4=4*31$
On calcule maintenant aisément en appliquant la formule de Bayes:

1) $$P(D2|C1)=\frac{P(D2\cap C1)}{P(C1)}=\frac{\frac{\#(D2\cap C1)}{\#\Omega}}{\frac{\#C1}{\#\Omega}}=\frac{\#(D2\cap C1)}{\#C1}=\frac{31}{8*31}=\frac{1}{8}$$

2) $$P(C2|D1)=\frac{P(C2\cap D1)}{P(D1)}=\frac{\frac{\#(C2\cap D1)}{\#\Omega}}{\frac{\#D1}{\#\Omega}}=\frac{\#(C2\cap D1)}{\#D1}=\frac{31}{4*31}=\frac{1}{4}$$

2c. Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher.
On effectue 20 tirages avec remise de la boule dans l'urne après avoir noté sa couleur.
Quelle est la probabilité d'obtenir 13 boules blanches et 7 boules noires?

P(blanche) = 10/15 = 2/3 et P(noire) = 5/15 = 1/3

P(13 blanches et 7 noires) = $C_{20}^{13}\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}=\frac{20!\ 2^{13}}{13!\ 7!\ 3^{20}}\cong 0{,}182$

3a. Calculez $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx$

$$\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + k$$

3b. Calculez $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx$ (réponse sous forme de décimal avec 2 chiffres après la virgule)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = \left[\frac{tg^4 x}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4}(9-1) = 2 \underset{☺}{=} 2{,}00$$

3c. Calculez l'aire du disque de rayon R.

$$A = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2 dx}$$

en posant x = Rsint, on a dx = Rcostdt et on calcule:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t \, dt = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = 2R^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \pi R^2$$

4a. Démontrez que la fonction ln est un morphisme de groupes. Précisez de quels groupes il s'agit.

$\ln:(R_0^+,\cdot)\to(R,+)$ et il faut démontrer que $\forall a,b\in R_0^+:\ln ab=\ln a+\ln b$

Calculons: $\ln ab \underset{\substack{\text{définition}\\ \text{de ln}}}{=} \int_1^{ab}\frac{1}{x}dx \underset{\substack{\text{additivité}\\ \text{de l'intégrale}}}{=} \int_1^{a}\frac{1}{x}dx+\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx \underset{\substack{\text{définition}\\ \text{de ln}}}{=} \ln a+\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx$

En posant $t=\frac{x}{a}$, on obtient: $\int_a^{ab}\frac{1}{x}dx=\int_1^{b}\frac{1}{t}dt \underset{\substack{\text{définition}\\ \text{de ln}}}{=} \ln b$ ce qui permet de conclure lnab = lna + lnb.

4b. Résolvez $2\ln(x+4)=\ln x+\ln 5$

$2\ln(x+4)=\ln x+\ln 5$ ssi $\ln(x+4)^2=\ln 5x$ $\underset{\text{ln est une bijection}}{\text{ssi}}$ $(x+4)^2=5x$ ssi $x^2+3x+16=0$

Mais $x^2+3x+16=0$ n'a pas de solution car son réalisant est strictement négatif. Donc $S=\varnothing$.

4c. Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a sachant que $f(x)=\ln^2 3x$ et $a=0,33333\ldots$

$T\equiv y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$f(a)=\ln^2 1=0;\ f'(x)=2\ln 3x\frac{1}{3x}3=\frac{2\ln 3x}{x};\ f'(a)=\frac{2\ln 1}{0,333\ldots}=0$

Donc $T\equiv y=0$

4d. Résolvez $e^{2x}-e^x-2\le 0$

$e^{2x}-e^x-2\le 0$ ssi $(e^x)^2-e^x-2\le 0$ ssi $-1\le e^x\le 2$ ssi $0<e^x\le 2$ ssi $x\le\ln 2$

Donc $S=]-\infty\,,\ln 2]$.

Jean-Pierre Verbeque