I. Analyse combinatoire - Probabilités

1. On tire, sans remise, deux cartes d'un jeu bien mélangé de 52 cartes.
   Quelle est la probabilité que :
   a). la deuxième carte soit un roi si la première est un pique ?
   b). la deuxième carte soit un pique si la première carte est un roi ?

Notons K l'ensemble des cartes. #K = 52.
Un tirage sans remise de deux cartes est un couple (a,b) d'éléments de K avec $a \neq b$.
Ainsi la catégorie d'épreuve $\Omega = K^2 \setminus \Delta\left(K^2\right)$ c'est-à-dire K^2 moins sa diagonale.

$\#\Omega = 52*51 = A_{52}^{2}$.
A ce stade, sachant que le mathématicien est celui qui voit, il peut être intéressant de faire un graphe cartésien de Ω.

Considérons les événements suivants :
A = la première carte est un roi. #A = 4*51
B = la deuxième carte est un roi. #B = 4*51
C = la première carte est un pique. #C = 13*51
D = la deuxième carte est un pique. #D = 13*51
E = la première carte est un pique et la deuxième carte est un roi. #E = 12*4 + 1*3 = 51
F = la première carte est un roi et la deuxième est un pique. #F = 3*13 + 1*12 = 51
$E = B \cap C = C \cap B$ et $F = A \cap D = D \cap A$

réponse à la question a).

$$p\left(B|C\right) = \frac{p\left(B \cap C\right)}{p\left(C\right)} = \frac{\frac{\#\left(B \cap C\right)}{\#\Omega}}{\frac{\#C}{\#\Omega}} = \frac{\#\left(B \cap C\right)}{\#C} = \frac{1}{13}$$

réponse à la question b).

$$p\left(D|A\right) = \frac{p\left(D \cap A\right)}{p\left(A\right)} = \frac{\frac{\#\left(D \cap A\right)}{\#\Omega}}{\frac{\#A}{\#\Omega}} = \frac{\#\left(D \cap A\right)}{\#A} = \frac{1}{4}$$

Conclusion : Dans ce cas-ci, les probabilités sont les mêmes que si on avait effectué les tirages <u>avec</u> remise.

2. Une urne contient 10 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher.
   On effectue 5 tirages succesifs avec remise de la boule dans l'urne après avoir noté sa couleur.
   On appelle succès le fait de tirer une boule noire et de manière quasi insoupçonnée, on se trouve devant un schéma de Bernoulli.
   a). Quelle est la probabilité de tirer 2 boules blanches et 3 boules noires ?
   b). Définissez la variable aléatoire associée au schéma de Bernoulli
   c). Dressez le tableau de la loi binomiale de cette variable. Calculez aussi son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

réponse a).

p = la probabilité de succès = $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

p(trois succès) = $C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{4}{9} = 0{,}16461$

réponse b).

Notons s le succès et e l'échec.

La variable aléatoire X est définie sur la catégorie d'épreuve $\Omega = \{s, e\}^5$ et associe à chaque 5-uple d'éléments de $\{s, e\}$, le nombre de succès.

Ainsi, $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et par exemple, $X\big((s, e, e, s, e)\big) = 2$.

réponse c).

X	p(X)	X*p(X)	X-E(X)	(X-E(X))^2	p(X)*(X-E(X))^2
0	0,13169	0,00000	-1,66667	2,77778	0,36580
1	0,32922	0,32922	-0,66667	0,44444	0,14632
2	0,32922	0,65844	0,33333	0,11111	0,03658
3	0,16461	0,49383	1,33333	1,77778	0,29264
4	0,04115	0,16461	2,33333	5,44444	0,22405
5	0,00412	0,02058	3,33333	11,11111	0,04572
	1,00000	E(X)=1,66667			V(X) = 1,11111
					σ(X) = 1,05409

II. Coniques

Voici la conique C d'équation $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ dans le repère R_1.

a). Quel est le genre affine de C ?
b). L'absence de terme en xy garantit une particularité de cette conique. Laquelle ?
c). Déterminez les coordonnées du centre de C dans le repère R_1.
d). Quelle transformation T du plan faut-il appliquer au repère R_1 pour que l'équation de C dans le nouveau repère R_2 ainsi obtenu apparaisse sous sa forme réduite ?
e). Déterminez l'équation de C dans le repère R_2.
f). Déterminez les coordonnées des foyers et des sommets de C dans R_1 et dans R_2.
g). Déterminez les équations des axes de symétrie, des directrices et des asymptotes de C dans R_1.
h). Déterminez dans R_1 , sous la forme y = ax+b, a et b étant exprimés avec trois décimales, les équations des tangentes à C issues du point (0,2) de R_1.
i). Faites un dessin dans R_1 de toutes les informations collectées ci-dessus

a). C est une ellipse car C a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C^{33} = 2 > 0$.

b). C a ses axes de symétrie parallèles aux axes du repère R_1.

c). Le centre de C a pour coordonnées (-1,-1) dans R_1. (intersection des 2 premières lignes…)

d). La translation T de vecteur (-1,-1).

e). $(x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 2(x-1) + 4(y-1) - 3 = 0$

c'est-à-dire : $x^2 + 2y^2 - 6 = 0$.

L'équation de C dans le repère R_2 est donc $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

f). dans R_2 : foyers : $(\sqrt{3},0)$ et $(-\sqrt{3},0)$

sommets : $(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0),(0,\sqrt{3})$ et $(0,-\sqrt{3})$

dans R_1 : foyers : $(-1+\sqrt{3},-1)$ et $(-1-\sqrt{3},-1)$

sommets : $(-1+\sqrt{6},-1),(-1-\sqrt{6},-1),(-1,-1+\sqrt{3})$ et $(-1,-1-\sqrt{3})$

g). axes : x = -1 et y = -1

directrices : $x = -1 + 2\sqrt{3}$ et $x = -1 - 2\sqrt{3}$

asymptotes : une ellipse n'a pas d'asymptotes.

h). Utilisons la méthode analytique.

Dans le faisceau F de droites de sommet (0,2), nous allons rechercher les droites qui ont un unique point d'intersection avec C.

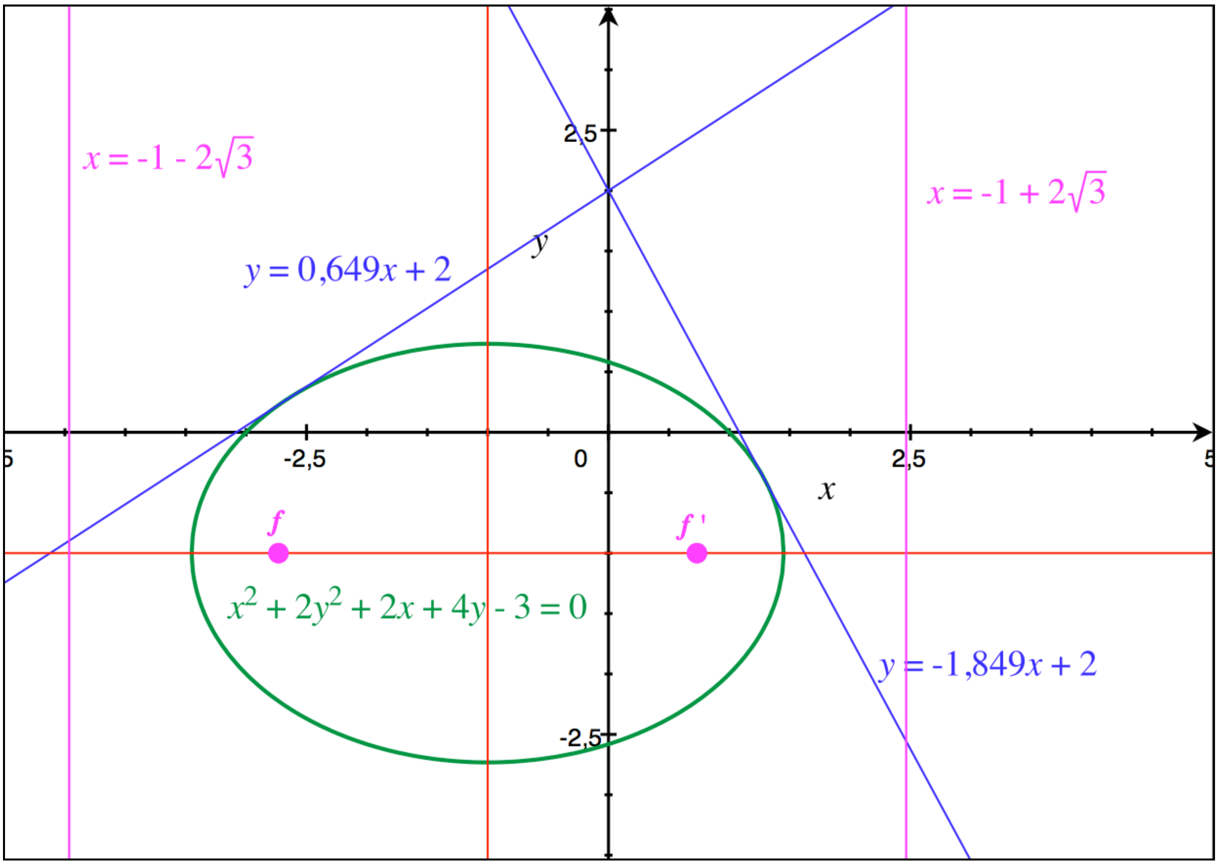
Considérons le système $\begin{cases} C \equiv x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 3 = 0 \\ F \equiv \begin{cases} x = \lambda m \\ y = \lambda n + 2 \end{cases} \end{cases}$

Substituons les valeurs de x et y de F dans l'équation de C et nous obtenons une équation du second degré en la variable λ.

La voici : $(m^2+2n^2)\lambda^2+2(m+6n)\lambda+13=0$
Elle ne peut admettre qu'une seule solution pcq…
Dès lors : $\rho'=(m+6n)^2-13(m^2+2n^2)=0$
En posant m = 1 et en développant, nous trouvons aisément : n = -1,849 ou n = 0,649.
Les équations cartésiennes des tangentes s'obtiennent en injectant les valeurs de m et n dans les équations paramétriques de F et en éliminant ensuite le paramètre λ.

Elles s'écrivent : $\boxed{\begin{array}{l} T_1 \equiv y=-1,849x+2 \\ T_2 \equiv y=0,649x+2 \end{array}}$

i). Un dessin pour terminer l'exercice :



III. Analyse infinitésimale.

1. Résolvez dans R: $1+\log_x 2-\log_x(2x+1) = \log_x(x-4)\cdot\log_{x-4}(x+3)-\dfrac{1}{\log_{x+4}x}$.
2. Calculez l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ à l'aide du calcul intégral.
3. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation, autour de l'axe des x, de l'ellipse définie ci-dessus.
4. Calculez $\int_0^1 x\ \mathrm{Arctg}x\ dx$.

---

1. On calcule successivement :

$$1+\log_x 2-\log_x(2x+1)=\log_x(x-4)\cdot\log_{x-4}(x+3)-\frac{1}{\log_{x+4}x}$$

$$1+\frac{\ln 2}{\ln x}-\frac{\ln(2x+1)}{\ln x}=\frac{\ln(x-4)}{\ln x}\frac{\ln(x+3)}{\ln(x-4)}-\frac{\ln(x+4)}{\ln x}$$

$$\ln x+\ln 2-\ln(2x+1)=\ln(x+3)-\ln(x+4)$$

$$\ln\frac{2x}{2x+1}=\ln\frac{x+3}{x+4}$$

$$\frac{2x}{2x+1}=\frac{x+3}{x+4}$$

$$2x(x+4)=(2x+1)(x+3)$$

$$2x^2+8x=2x^2+7x+3$$

$$x=3$$

Cette solution est à rejeter car il faut que x - 4 > 0.

2. L'aire égale $4\int_0^{\sqrt6}\sqrt{\dfrac{6-x^2}{2}}dx = 2\sqrt2\int_0^{\sqrt6}\sqrt{6-x^2}\ dx = \dots = 3\pi\sqrt2$.

3. Le volume égale $2\int_0^{\sqrt6}\pi\ f^2(x)dx = 2\int_0^{\sqrt6}\pi\left(\dfrac{6-x^2}{2}\right)dx = \pi\left[6x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt6} = 4\pi\sqrt6$.

4. Calculons :

$$\int x\ \mathrm{Arctg}x\ dx = \dots \text{ par parties } = \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctg}x-\frac12\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{Arctg}x-\frac12\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{Arctg}x-\frac{x}{2}+\frac12\mathrm{Arctg}x$$

Dès lors,

$$\int_0^1 x\ \mathrm{Arctg}x\ dx=\left[\frac{x^2+1}{2}\mathrm{Arctg}x-\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac12=\frac{\pi-2}{4}$$