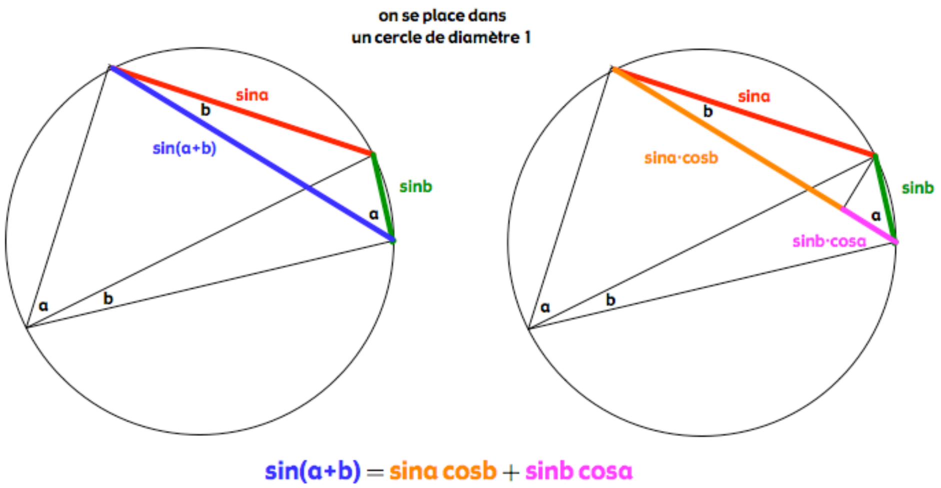
## I. Trigonométrie

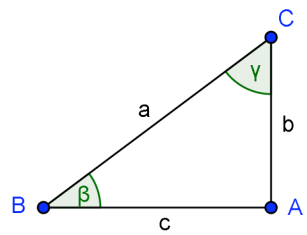
1. Enoncez la « formule » de $\sin(a+b)$ et faites-en une démonstration à l'aide d'outils géométriques et trigonométriques. Les dessins doivent être clairs et les arguments utilisés doivent être justifiés.




Pour être complet, il faut préciser

- que le sinus d'un angle inscrit dans un cercle de diamètre 1, c'est la corde de l'angle
- que des angles inscrits qui interceptent le même arc (ou la même corde), sont égaux

et il faut rappeler la formule du triangle rectangle




$c = a\cos\beta$

---

2. Vérifiez l'identité $\dfrac{\cos a}{1+\cos 2a}\cdot\dfrac{\sin 2a}{1+\cos a}=\cot g\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)$.Justifiez chaque étape de vos calculs.

Calculons : $\dfrac{\cos a}{1+\cos 2a}\cdot\dfrac{\sin 2a}{1+\cos a}\underset{(1)}{=}\dfrac{\cos a\cdot 2\sin a\cos a}{2\cos^2 a\cdot(1+\cos a)}\underset{(2)}{=}\dfrac{\sin a}{1+\cos a}\underset{(3)}{=}\dfrac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}\underset{(4)}{=}\mathrm{tg}\dfrac{a}{2}\underset{(5)}{=}\cot g\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)$

Justifications :

(1) Formule de duplication sin2a = …
Formule de Carnot 1 + cos2a = …
(2) Simplification par $2\cos^2 a$
(3) Formule de duplication sina = …
Formule de Carnot 1 + cosa = …

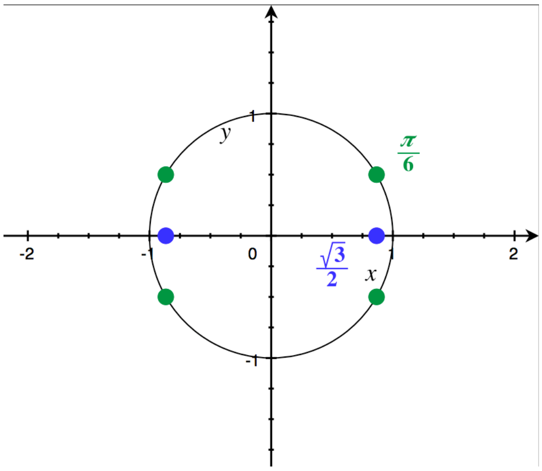
(4) Simplification par $2\cos\dfrac{a}{2}$

(5) Définition de **<u>co</u>**tg. $\cot gx = \mathrm{tg}(\mathrm{co}x)$

3. Résolvez l'équation $3\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2,75$ et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Calculons successivement :

$$3\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2,75$$
$$3\cos^2 x + 2\left(1-\cos^2 x\right) = 2,75$$
$$\cos^2 x = 0,75 = \frac{3}{4}$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$




Les solutions s'écrivent :

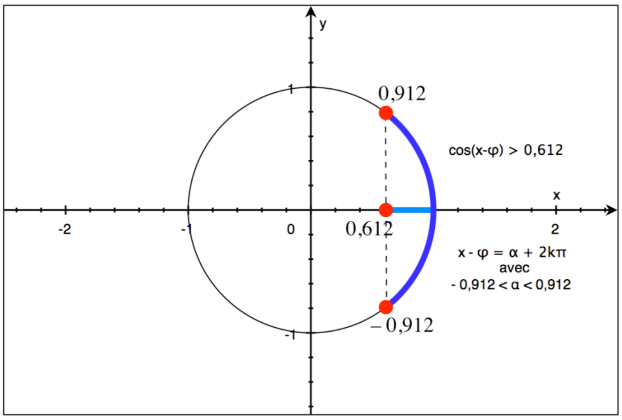
$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

4. Résolvez l'inéquation $2\sin x + 2\cos x > \sqrt{3}$ et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

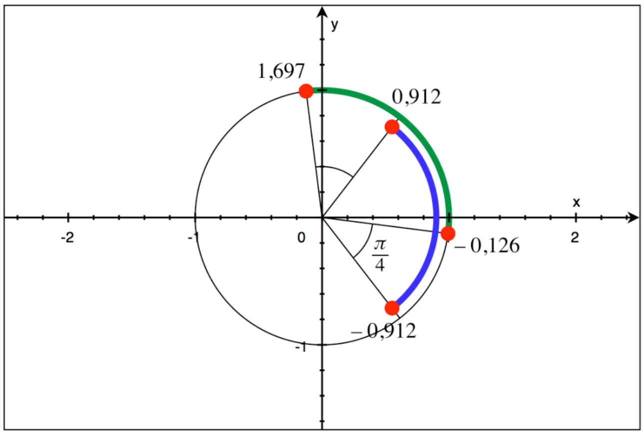
On calcule : $\sin x + \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ensuite on pose $\operatorname{tg}\varphi = 1$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ce qui donne successivement : $\operatorname{tg}\varphi \sin x + \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

$$\sin\varphi \sin x + \cos\varphi \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \;;\; \cos(x-\varphi) > \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cong 0,612$$




$$x = \alpha + \varphi + 2k\pi \text{ avec } -0,912 < \alpha < 0,912$$
$$x = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } -0,912 < \alpha < 0,912$$
$$x = \beta + 2k\pi \text{ avec } -0,126 < \beta < 1,697$$



## II. Matrices et déterminants

1. Définissez la multiplication des matrices réelles d'ordre 3.

$$\forall \left(a_{i,j}\right),\left(b_{i,j}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \left(a_{i,j}\right)\cdot\left(b_{i,j}\right) = \left(c_{i,j}\right) \text{ où } c_{i,j} \triangleq \sum_{k=0}^{3} a_{i,k}b_{k,j}$$

---

2. Quelle structure la multiplication donne-t-elle à $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ? Justifiez.

$$\left(\mathbb{R}^{3\times 3},\cdot\right) \text{ est un demi-groupe unital non commutatif}$$

VOIR DETAILS ET JUSTIFICATIONS DANS LE COURS

---

3. Si une rangée d'une matrice est combinaison linéaire des autres rangées parallèles, alors son déterminant est nul. Démontrez cette propriété dans $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

VOIR COURS

---

4. Calculez le déterminant suivant après avoir fait d'éventuelles mises en évidence et après avoir fait apparaître deux zéros dans une rangée. Déterminez ensuite les valeurs réelles du paramètre λ qui annulent ce déterminant.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2 & 3\lambda & 3\lambda \\ 3 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda \\ \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+5\lambda & \lambda^2+5\lambda \end{vmatrix}$$

Calculons :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2 & 3\lambda & 3\lambda \\ 3 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda \\ \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+5\lambda & \lambda^2+5\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{mise en évidence} \\ \text{de } \lambda \text{ dans C2 et C3}}}{=} \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda^2+2 & 3 & 3 \\ 3 & \lambda+2 & 3 \\ \lambda^2+\lambda+4 & \lambda+5 & \lambda+5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{C2\textbackslash C2}-\text{C3} \\ \text{C1\textbackslash C1}-\text{C3}}}{=} \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ \lambda^2-1 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{mises en} \\ \text{évidence}}}{=} \lambda^2\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda-1\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \lambda+5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{calcul du déterminant} \\ \text{par les cof de C2}}}{=} \lambda^2\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+5-3\right) = \lambda^2\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda+1\right)\left(\lambda+2\right)$$

Ce déterminant est nul ssi $\lambda \in \{-2,-1,0,1\}$

## III. Systèmes linéaires

Résolvez, discutez et interprétez géométriquement :

$$\begin{cases} x + my + z = 2m \\ x + y + mz = 0 \\ (m+1)x + my + z = m \end{cases} \qquad \text{(m est un paramètre réel)}$$

Le déterminant de la matrice A du système égale $m(m-1)(m+1)$

1er cas : $m \notin \{-1,0,1\}$

Le système est déterminé (ou de Cramer). Son unique solution est le point de coordonnée $\left(-1, \frac{2m-1}{m-1}, \frac{1}{1-m}\right)$. Les trois plans se coupent suivant un singleton.

2ème cas : $m = -1$

La matrice A est de rang 2 car L1 et L2 sont indépendantes.
$L3 = \frac{1}{2}L1 - \frac{1}{2}L2$ et les termes indépendants suivent cette CL.
Le système est donc simplement indéterminé. Les trois plans se coupent suivant la droite $S = \{(-1, \lambda+1, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Cette droite passe par le point $(-1,1,0)$ et admet $(0,1,1)$ comme vecteur directeur.

3ème cas : $m = 0$

La matrice A est de rang 2 car L1 et L2 sont indépendantes.
L3 = L1+0*L2 et les termes indépendants suivent cette CL.
Le système est donc simplement indéterminé. Les trois plans se coupent suivant la droite $S = \{(-\lambda, \lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. C'est la droite vectorielle de vecteur directeur $(-1,1,1)$.

4ème cas : $m = 1$

La matrice A est de rang 2 car L2 et L3 sont indépendantes.
L1 = L2+0*L3 et les termes indépendants ne suivent pas cette CL. Le système est impossible.
Deux plans sont parallèles distincts et le troisième les coupe.

Et pour conclure, un petit tableau.

| m | | -1 | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nature du système | D | SI | D | SI | D | I | D |

**IV. Géométrie de l'espace**

1. Déterminez une équation cartésienne du plan $\alpha$ qui comprend les points a = (1,2,3), b = (2,1,3) et c = (3,3,5)

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z-3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha \equiv (x-1)(-2)+(y-2)(-2)+(z-3)(3)=0$$

$$\alpha \equiv -2x-2y+3z-3=0$$

$$\alpha \equiv 2x+2y-3z+3=0$$

---

2. Déterminez le point de percée p de la droite D dans le plan $\delta$.

$$D \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda+2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta \equiv x+2y+3z+4=0 .$$

Si ce point $(x,y,z)$ existe, il est solution du système

$$\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda+2 \\ z = 5 \\ x+2y+3z+4=0 \end{cases}$$

Résolvons le système par substitution.
On trouve successivement :
$\lambda = -26$ ; $x = 29$ ; $y = -24$ ; $z = 5$

Ainsi $p = (29,-24,5)$

---

3. Déterminez un vecteur directeur de la droite définie par les plans $\alpha$ et $\delta$ des questions 1 et 2.

Un vecteur directeur de la droite $D = \alpha \cap \delta$

égale un point non nul de la droite $D_0 = \alpha_0 \cap \delta_0 \equiv \begin{cases} 2x+2y-3z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$

Recherchons le point de cote 1.

$z=1$ et $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ ; d'où $x=6$ et $y=-\dfrac{9}{2}$

Le point $\left(6,-\dfrac{9}{2},1\right)$ est donc vecteur directeur de D, ainsi que tous ses multiples scalaires non nuls.

Je préfère $(12,-9,2)$, car je trouve que c'est le plus beau de tous les vecteurs directeurs de D.