le 11 décembre 2006

CS de mathématique en 5TB (SM)

- Veuillez traiter chaque question sur une double feuille à en-tête du Collège

I. Trigonométrie

1. Enoncez la « formule » de $\sin(a+b)$ et faites-en une démonstration à l'aide d'outils géométriques et trigonométriques. Les dessins doivent être clairs et les arguments utilisés doivent être justifiés.
2. Vérifiez l'identité $\dfrac{\cos a}{1+\cos 2a}\cdot\dfrac{\sin 2a}{1+\cos a}=\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{2}\right)$

   Justifiez chaque étape de vos calculs.
3. Résolvez l'équation $3\cos^2 x+2\sin^2 x=2,75$ et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique :
4. Résolvez l'inéquation $2\sin x+2\cos x>\sqrt{3}$ et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

II. Matrices et déterminants

1. Définissez la multiplication des matrices réelles d'ordre 3.
2. Quelle structure la multiplication donne-t-elle à $\mathbb{R}^{3\times 3}$? Justifiez.
3. Si une rangée d'une matrice est combinaison linéaire des autres rangées parallèles, alors son déterminant est nul. Démontrez cette propriété dans $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
4. Calculez le déterminant suivant après avoir fait d'éventuelles mises en évidence et après avoir fait apparaître deux zéros dans une rangée. Déterminez ensuite les valeurs réelles du paramètre λ qui annulent ce déterminant.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2 & 3\lambda & 3\lambda \\ 3 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda \\ \lambda^2+\lambda+4 & \lambda^2+5\lambda & \lambda^2+5\lambda \end{vmatrix}$$

III. Systèmes linéaires

Résolvez, discutez et interprétez géométriquement :

$$\begin{cases} x+my+z=2m \\ x+y+mz=0 \\ (m+1)x+my+z=m \end{cases} \qquad \text{(m est un paramètre réel)}$$

IV. Géométrie de l'espace

1. Déterminez une équation cartésienne du plan α qui comprend les points a = (1,2,3), b = (2,1,3) et c = (3,3,5)
2. Déterminez le point de percée p de la droite D dans le plan δ.

$$D\equiv\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda+2 \\ z=5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta\equiv x+2y+3z+4=0.$$

3. Déterminez un vecteur directeur de la droite définie par les plans α et δ des questions 1 et 2.

Jean-Pierre Verbeque