Une correction du CS de mathématique
du 18 juin 2007 en 6TD(EcL-GL-LG-LL-LN)

Sujet 1. Géométrie et systèmes d'équations

1. a). Un vecteur directeur de D est le point $(-1,1,2)$ et un point de passage de D est $(1,4,3)$.

   Dès lors, $D \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

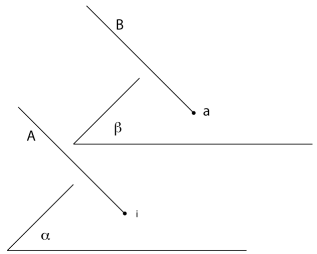
   b). Il n'est pas nécessaire de se lancer dans de longs calculs car on voit que chaque point a la somme de ses coordonnées égale à 5.
   D'où : $\delta \equiv x+y+z=5$

2. a). $B \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 7 \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda + 4 \end{cases}$

   b). $\beta \equiv 5x - 3y + 4z - 48 = 0$

   c). On résoud le système des équations de A et α et on trouve $\lambda = -1$.
   Par conséquent le point de percée de A dans α est $i = (2,4,1)$

   d).



3. a). Le système (1) est déterminé.
   Sa solution, le point $(3,2,1)$ peut se calculer de la manière suivante :
   Notons L1 la première ligne du système, L2 la deuxième etc…
   L2 – L3 donne 3y = 6, y = 2.
   L1 devient : x + 3z = 6 et L2 devient : x + z = 4. D'où on tire z = 1 et x = 3.

   b). Le système (2) est simplement indéterminé.
   En effet, L1 et L2 définissent des plans sécants car les coefficients respectifs de x, y et z ne sont pas proportionnels. De plus L1 + L2 = L3. Par conséquent, grâce à Gauss, le plan défini par L3 passe par l'intersection de L1 et L2.
   Les trois plans du système se coupent donc suivant une droite.

   Le système (3) est impossible.
   En effet, notons L10 la ligne L1 privée de son terme indépendant, L20 etc…
   et T1 le terme indépendant de L1, T2 etc…

   On voit que L1, L2 et L3 définissent des plans sécants deux à deux.
   Comme L30 = L10 + L20, les sous vectoriels directeurs de L1, L2 et L3 se coupent suivant une même droite. Mais comme T3 ≠ T1 + T2, les trois plans du système ne se coupent pas suivant une même droite. Ils se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles. Ils se comportent donc comme les faces d'un « toblerone ». Leur intersection est vide.

Sujet 2. Analyse combinatoire et probabilités

1. (voir cours)

2. Le terme général du dévelopement de $\left(3x+\dfrac{4}{x^2}\right)^{11}$ est $C_{11}^k (3x)^k \left(\dfrac{4}{x^2}\right)^{11-k} = C_{11}^k 3^k 4^{11-k} x^{3k-22}$.

   3k – 22 = 3 n'a pas de solution entière. Il n'y a donc pas de terme en x^3.
   3k – 22 = 2 admet pour solution k = 8. Le terme en x^2 est donc $C_{11}^8 3^8 4^3 x^2 = 69284160x^2$

3. a). $p(3g) = \dfrac{C_9^3}{C_{28}^3} = \dfrac{1}{39} = 0{,}025641$

   b). $p(2g \text{ et } 1f) = \dfrac{C_9^2 \cdot C_{19}^1}{C_{28}^3} = \dfrac{19}{91} = 0{,}208791$

   c). $p(2f \text{ et } 1g) = \dfrac{C_{19}^2 \cdot C_9^1}{C_{28}^3} = \dfrac{171}{364} = 0{,}469780$

   d). $p(3f) = \dfrac{C_{19}^3}{C_{28}^3} = \dfrac{323}{1092} = 0{,}295788$

   e). 0,025641 + 0,208791 + 0,469780 + 0,295788 = 1
   C'est bien normal puisque l'événement certain, de probabilité 1, est d'obtenir soit trois garçons, soit deux garçons et une fille, soit un garçon et deux filles, soit trois filles.

4. a). L'expérience aléatoire « lancer une fléchette » n'a que deux résultats possibles :
   succès = atteindre la cible, échec = rater la cible. C'est donc une épreuve de Bernoulli.
   Comme on la répète 8 fois, on a affaire à un schéma de Bernoulli.

   b) La variable aléatoire X de ce schéma de Bernoulli est la fonction qui associe à chaque résultat de 8 lancers son nombre de succès. Par exemple : $X(s,e,e,e,s,s,e,e) = 3$

   c) Il s'agit de la loi binomiale B(8 ; 0,4).

   d).

k	p(X = k)
0	0,01679616
1	0,08957952
2	0,20901888
3	0,27869184
4	0,23224320
5	0,12386304
6	0,04128768
7	0,00786432
8	0,00065536

e) $E(X) = np = 8*0,4 = 3,2$

f). $p(X\geq 2) = 1-p(X<2)=1-\left(p(X=0)+p(X=1)\right)=0,89362432$

Sujet 3. Logarithmes et exponentielles

1. (voir cours)
2. a). $\mathrm{dom}f = \left]-1,1\right[$

   b). $f'(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

   c). $T\equiv y-f(0)=f'(0)(x-0)$. D'où $T\equiv y=0$.
3. $5\ln^2 x-3\ln x^2+1=0$ ssi $5\ln^2 x-6\ln x+1=0$ ssi $\ln x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-5}}{5}=1$ ou $\dfrac{1}{5}$

   Dès lors, $x=e$ ou $x=e^{\frac{1}{5}}$ et $S=\left\{e,\sqrt[5]{e}\right\}$
4. $e^{2x}-3e^x+2\leq 0$ ssi $\left(e^x\right)^2-3e^x+2\leq 0$ ssi $1\leq e^x\leq 2$ ssi $\ln 1\leq x\leq \ln 2$

   $S=\left[0,\ln 2\right]$
5. Par parties en posant u = lnx et dv = xdx :

   $\int x\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{1}{2}\int x dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+k=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-1)+k$.
6. Par substitution, en posant $t=e^x+2$, on obtient : $\int\dfrac{e^x}{e^x+2}dx=\ln\left|e^x+2\right|+k=\ln\left(e^x+2\right)+k$.

Jean-Pierre Verbeque