Sujet 1. Primitives et intégrales

1. Dans le cas d'une fonction numérique réelle continue et positive définie sur un intervalle fermé $[a,b]$, mettez en évidence l'encadrement d'une grandeur par une somme de produits élémentaires et indiquez comment le passage à une certaine limite conduit à la notion d'intégrale.
   Illustrez vos explications à l'aide de jolis dessins.

VOIR NOTES DE COURS

---

2. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) fit une géniale découverte qui établit un lien entre primitive et intégrale. Il érigea sa découverte en théorème.
   Enoncez ce théorème, dites quel nom lui a été donné et illustrez-le à l'aide d'un exemple.

VOIR NOTES DE COURS

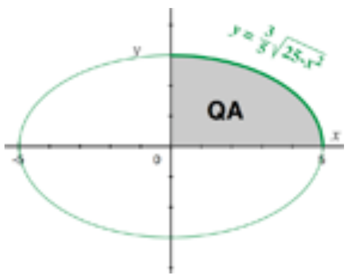
---

3. Calculez : a) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$; c) $\int \sin^2 x \ dx$

- $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{3}{2}}dx = 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k$
- $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \text{tg}x + \frac{1}{\cos x} + k$
- $\int \sin^2 x \ dx \underset{\text{Carnot}}{=} \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + k$

---

4. Calculez l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



$$A = 4 \cdot QA = 4\int_0^5 \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\,dx \underset{x=5\sin t}{=} \frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t\,dt$$

$$\underset{\text{Carnot}}{=} 30\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 30\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 15\pi$$

---

5. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation autour de l'axe X de l'ellipse définie ci-dessus.

V = $\pi\int_{-5}^{5} \frac{9}{25}(25-x^2)\,dx = \frac{9\pi}{25}\left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{5} = \frac{9\pi}{25}\frac{500}{3} = 60\pi$ **.**

Sujet 2. Combinatoire

1. Enoncez et démontrez la formule qui fournit le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

VOIR NOTES DE COURS

2. Vos auteurs favoris du 17e siècle sont Molière, Racine et Corneille. Du premier vous possédez 5 livres ; du deuxième, 3 livres ; du troisième, 4 livres.
   De combien de manières pouvez-vous les ranger sur une étagère de votre bibliothèque si vous décidez de laisser ensemble les livres d'un même auteur ? Justifiez vos calculs.

Nommons respectivement PM, PR et PC l'ensemble des permutations des livres de Molière, Racine et Corneille.

✶ $\# PM = 5\,!$; $\# PR = 3\,!$; $\# PC = 4\,!$

Le rangement $\boxed{\text{Molière , Racine , Corneille}}$ est un triple (a , b , c) où $a \in PM$, $b \in PR$ et $c \in PC$.

Combien de tels triples ? $\# PM \cdot \# PR \cdot \# PC = 5!\ 3!\ 4!$

Mais on peut permuter les auteurs entre eux de 3 ! manières (MRC, MCR, RMC, …) et chacune de ces permutations fournit 5! 3! 4! rangements.

Donc il y a $3!\,(5!\ 3!\ 4!) = 103680$ rangements en tout.

3. Vous désirez ranger 5 boules dans 7 cases. Quel est le nombre de rangements possibles si
   a). les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
   b). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
   c). les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
   d). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
   Justifiez vos calculs.

a). Chaque rangement égale une injection de l'ensemble des 5 boules dans l'ensemble des 7 cases.

Combien de telles injections ? $A_7^5 = \dfrac{7!}{2!} = 2520$

b). Chaque rangement égale une partie à 5 éléments de l'ensemble des cases.

Combien de telles parties ? $C_7^5 = \dfrac{7!}{5!\ 2!} = 21$

c). Chaque rangement égale une fonction de l'ensemble des 5 boules dans l'ensemble des 7 cases.

Combien de fonctions ? $\alpha_7^5 = 7^5 = 16807$

d). Chaque rangement égale une combinaison à répétition de 5 cases choisies parmi 7 cases.

Combien de telles combinaisons ? $\gamma_7^5 = C_{11}^5 = \dfrac{11!}{5!\ 6!} = 462$