



le 18 juin 2007

CS de mathématique en 6TD (EcL-GL-LG-LL-LN)

- Veuillez traiter chaque sujet sur une feuille double à en-tête du Collège.
- Le CS doit être terminé à 12h20.
- Une calculatrice est autorisée pour un usage strictement personnel.
- Les questions sont souvent plus longues que les réponses. ne vous découragez donc pas trop vite.

Sujet 1. Géométrie et systèmes d'équations

1. a). Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite D de \mathbb{R}^3 passant par les points $(1, 4, 3)$ et $(2, 3, 1)$.
- b). Déterminez une équation cartésienne du plan δ de \mathbb{R}^3 passant par les points $(1, 4, 0)$, $(2, 2, 1)$ et $(-1, 2, 4)$.

2. Voici le point a, la droite A et le plan α de \mathbb{R}^3 :

$$a = (7, 1, 4); \quad A \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 5 \\ y = 2 - 2\lambda; \\ z = \lambda + 2 \end{cases}; \quad \alpha \equiv 5x - 3y + 4z - 2 = 0$$

- a). Donnez un système d'équations paramétriques de la droite B passant par le point a et parallèle à la droite A.
 - b). Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point a et parallèle au plan α .
 - c). Calculez, s'il existe, le point de percée de la droite A dans le plan α .
 - d). Faites un schéma qui rassemble tous les éléments de cet exercice.
3. Exactement un des trois systèmes suivants est déterminé :

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 12 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 11 \end{cases}$$

- a). Lequel des trois ? Calculez sa solution par la méthode de substitution.
- b). Quelle est la nature des deux autres systèmes ? Donnez-en une interprétation géométrique.

Sujet 2. Analyse combinatoire et probabilités

1. Énoncez et démontrez la formule de Pascal.

2. Calculez le terme en x^2 et le terme en x^3 de $\left(3x + \frac{4}{x^2}\right)^{11}$. (Achevez vos calculs).

3. Dans cette classe il y a 19 filles et 9 garçons. Afin de récompenser trois élèves au moyen d'un prix spécial de mathématique, le professeur décide d'organiser un tirage au sort. Il dépose donc dans une urne 28 petits billets sur lesquels il a soigneusement noté les noms de ses élèves (un billet par élève) et après avoir bien mélangé le contenu de l'urne, il effectue un tirage de trois billets. Calculez la probabilité que le tirage désigne comme lauréats :

- a). Trois garçons
- b). Deux garçons et une fille
- c). Deux filles et un garçon
- d). Trois filles
- e). Exprimez chacun des résultats obtenus sous forme de décimal avec 6 chiffres après la virgule. Faites la somme de ces résultats et tirez-en une conclusion.

4. Un lanceur de fléchettes atteint une cible avec une probabilité évaluée à 0,4. Il lance 8 fois une fléchette.

- a). On se trouve devant un schéma de Bernoulli. Expliquez.
- b). Décrivez la variable aléatoire de ce schéma.
- c). Comment appelle-t-on la loi de probabilité de la variable aléatoire de ce schéma ?
- d). Dressez le tableau de cette loi de probabilité.
- e). Quel est le résultat le plus probable (espérance mathématique) ?
- f). Quelle est la probabilité que le lanceur atteigne la cible au moins deux fois ?

Sujet 3. Logarithmes et exponentielles

1. Définissez la fonction logarithme népérienne et démontrez qu'elle est un morphisme de groupes. Précisez de quels groupes il s'agit.

2. Voici la fonction $f(x) = \ln(1 - x^2)$

- a). Quel est son domaine de définition ?
- b). Calculez sa dérivée.
- c). Déterminez une équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.

3. Résolvez $5 \ln^2 x - 3 \ln x^2 + 1 = 0$.

4. Résolvez $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$.

5. Calculez $\int x \ln x \, dx$.

6. Calculez $\int \frac{e^x}{e^x + 2} \, dx$.