Sujet 1. Fonctions cyclométriques et nombres complexes.

1. Développez la démarche qui permet de définir la fonction Arcsin, calculez-en la dérivée et dressez-en un graphe cartésien soigné.

VOIR NOTES DE COURS

---

2. Vérifiez que $\forall x \in [1,\rightarrow[: \operatorname{Arc}\sin\frac{x-1}{x+1} = \operatorname{Arc}\cos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$.

▶ $x \in [1,\rightarrow[$

Posons $\alpha = \operatorname{Arc}\sin\frac{x-1}{x+1}$ et $\beta = \operatorname{Arc}\cos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$. Il faut prouver que $\alpha = \beta$.
Mais $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ parce que $\frac{x-1}{x+1} \in [0,1]$ et $\beta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ parce que …

Comme α et β appartiennent au même quadrant, ils seront égaux ssi ils ont même sinus.
Calculons :
$\boxed{\sin\alpha = \frac{x-1}{x+1}}$; $\cos\beta = \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$; $\cos^2\beta = \frac{4x}{(x+1)^2}$; $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = \frac{(x+1)^2-4x}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$; $\boxed{\sin\beta = \frac{x-1}{x+1}}$ ■

---

3. Enoncez et démontrez la formule de Moivre.

VOIR NOTES DE COURS

---

4. Considérons l'équation complexe $z^3+(a-i)z^2+(b-ai)z-bi=0$ où $a,b \in \mathbb{R}$.
   Vérifiez que z = i est une solution de cette équation.
   Déterminez a et b pour que le produit des trois solutions égale i et que la somme des trois solutions égale 1 + i.

L'équation complexe poroposée est de degré 3. Elle admet donc exactement 3 solutions complexes. On nous en donne une, à savoir i. On peut donc factoriser $z^3+(a-i)z^2+(b-ai)z-bi$ en $(z-i)(z^2+az+b)$. Les deux autres solutions sont solutions de $(z^2+az+b)=0$ et ont pour somme S2 = – a et pour produit P2 = b.
Comme la somme S3 des trois solutions égale 1+i, S2 égale 1
et comme le produit P3 des trois solutions égale i, P2 égale 1.
Dès lors: a = –1 et b = 1.

Sujet 2. Primitives et intégrales

1. Enoncez le théorème fondamental de l'Analyse. Illustrez-le par un exemple et expliquez ce qui fait l'intérêt de ce théorème.

VOIR NOTES DE COURS

---

2. Calculez $\int \frac{x+2}{x+3}dx$; $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$; $\int x\cos x dx$.

$$\int \frac{x+2}{x+3}dx = \int \frac{x+3-1}{x+3}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x+3}dx = x - \ln|x+3| + k$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\frac{\sin^4 x}{2}}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)^2}}dx$$

$$\underset{\substack{\text{posons}\\ t=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 x}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin t + k = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

$$\int x\cos x dx \underset{\substack{\text{par parties}\\ u=x\\ dv=\cos x dx}}{=} x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + k$$

---

3. Calculez l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$$A = 4\int_0^5 \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}dx \underset{x=5\sin t}{=} \frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t dt \underset{\text{Carnot}}{=} 30\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 30\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 15\pi$$

---

4. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation autour de l'axe X de l'ellipse définie ci-dessus.

$$\mathbf{V} = \pi\int_{-5}^5 \frac{9}{25}(25-x^2)dx = \frac{9\pi}{25}\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_{-5}^5 = \frac{9\pi}{25}\frac{500}{3} = 60\pi\,.$$

Sujet 3. Analyse combinatoire et binôme de Newton.

1. Enoncez et démontrez la formule qui fournit le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

VOIR NOTES DE COURS

---

2. Vos auteurs favoris du 17e siècle sont Molière, Racine et Corneille. Du premier vous possédez 5 livres ; du deuxième, 3 livres ; du troisième, 4 livres.
   De combien de manières pouvez-vous les ranger sur une étagère de votre bibliothèque si vous décidez de laisser ensemble les livres d'un même auteur ? Justifiez vos calculs.

Nommons respectivement PM, PR et PC l'ensemble des permutations des livres de Molière, Racine et Corneille.
✶ # PM = 5 ! ; # PR = 3 ! ; # PC = 4 !
Le rangement $\boxed{\text{Molière , Racine , Corneille}}$ est un triple (a , b , c) où $a \in$ PM, $b \in$ PR et $c \in$ PC.
Combien de tels triples ? $\#PM \cdot \#PR \cdot \#PC = 5!\ 3!\ 4!$
Mais on peut permuter les auteurs entre eux de 3 ! manières (MRC, MCR, RMC, …) et chacune de ces permutations fournit 5! 3! 4! rangements.
Donc il y a $3!\,(5!\ 3!\ 4!) = 103680$ rangements en tout.

---

3. Vous désirez ranger 5 boules dans 7 cases. Quel est le nombre de rangements possibles si
   a). les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
   b). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
   c). les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
   d). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
   Justifiez vos calculs.

---

a). Chaque rangement égale une injection de l'ensemble des 5 boules dans l'ensemble des 7 cases.
Combien de telles injections ? $A_7^5 = \dfrac{7!}{2!} = 2520$

b). Chaque rangement égale une partie à 5 éléments de l'ensemble des cases.
Combien de telles parties ? $C_7^5 = \dfrac{7!}{5!\ 2!} = 21$

c). Chaque rangement égale une fonction de l'ensemble des 5 boules dans l'ensemble des 7 cases.
Combien de fonctions ? $\alpha_7^5 = 7^5 = 16807$

d). Chaque rangement égale une combinaison à répétition de 5 cases choisies parmi 7 cases.
Combien de telles combinaisons ? $\gamma_7^5 = C_{11}^5 = \dfrac{11!}{5!\ 6!} = 462$

---

4. Calculez le terme en x^3 de $\left(4x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{15}$.

Le terme général du développement, par la formule de Newton, du binôme proposé égale

$$C_{15}^i \left(4x^2\right)^i \cdot \left(\frac{-1}{2x}\right)^{15-i} = C_{15}^i 4^i (-1)^{15-i} 2^{i-15} x^{3i-15}.$$

Le terme en x^3 s'obtient donc pour i = 6 et s'écrit : $C_{15}^6 4^6 (-1)^9 2^{-9} x^3 = -40040x^3$

---

5. Démontrez que si n et p sont premiers entre eux, alors n divise C_n^p.

$C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$ est un nombre naturel. Comme $\dfrac{n}{p}$ ne se simplifie pas, c'est $\dfrac{C_{n-1}^{p-1}}{p}$ qui se simplifie en un naturel k.
Donc, $C_n^p = n \cdot k$ où $k \in \mathbb{N}$ et n est bien un diviseur de C_n^p.
