



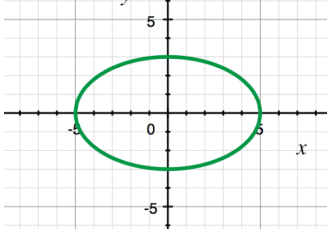
**CS de mathématique en 6TB(SM) -TC (FM)**

- Veuillez traiter chaque sujet sur une double feuille à en-tête du Collège

**Sujet 1. Fonctions cyclométriques et nombres complexes.**

1. Développez la démarche qui permet de définir la fonction Arcsin, calculez-en la dérivée et dressez-en un graphe cartésien soigné.
2. Vérifiez que  $\forall x \in [1, \rightarrow[ : \text{Arc sin } \frac{x-1}{x+1} = \text{Arc cos } \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ .
3. Énoncez et démontrez la formule de Moivre.
4. Considérons l'équation complexe  $z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - bi = 0$  où  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
Vérifiez que  $z = i$  est une solution de cette équation.  
Déterminez  $a$  et  $b$  pour que le produit des trois solutions égale  $i$  et que la somme des trois solutions égale  $1 + i$ .

**Sujet 2. Primitives et intégrales**

1. Énoncez le théorème fondamental de l'Analyse. Illustrez-le par un exemple et expliquez ce qui fait l'intérêt de ce théorème.
  2. Calculez  $\int \frac{x+2}{x+3} dx$  ;  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx$  ;  $\int x \cos x dx$ .
  4. Calculez l'aire de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- 
5. Calculez le volume de l'ellipsoïde engendré par la rotation autour de l'axe X de l'ellipse définie ci-dessus.

**Sujet 3. Analyse combinatoire et binôme de Newton.**

1. Énoncez et démontrez la formule qui fournit le nombre de parties à  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.
2. Vos auteurs favoris du 17<sup>e</sup> siècle sont Molière, Racine et Corneille. Du premier vous possédez 5 livres ; du deuxième, 3 livres ; du troisième, 4 livres.  
De combien de manières pouvez-vous les ranger sur une étagère de votre bibliothèque si vous décidez de laisser ensemble les livres d'un même auteur ? Justifiez vos calculs.
3. Vous désirez ranger 5 boules dans 7 cases. Quel est le nombre de rangements possibles si
  - a). les boules et les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
  - b). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case ne pouvant recevoir qu'une seule boule ?
  - c). les boules et les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?
  - d). les boules sont indiscernables, les cases sont discernables, chaque case pouvant recevoir un nombre quelconque de boules ?Justifiez vos calculs.
4. Calculez le terme en  $x^3$  de  $\left(4x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{15}$ .
5. Démontrez que si  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux, alors  $n$  divise  $C_n^p$ .