I. Calcul vectoriel et produit scalaire

1) Définissez le produit scalaire usuel du plan vectoriel usuel π_0 et vérifiez sa commutativité.
(voir cours)

2) Le plan $\mathbb{R}^2$ équipé de son addition habituelle et de la multiplication scalaire suivante $\forall\lambda\in\mathbb{R},\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2:\lambda\cdot(a,b)=(\lambda a,b)$ est-il un espace vectoriel réel ?
NON, car cette multiplication ne distribue pas l'addition des réels.
En effet, $(2+3)(0,1)=5(0,1)=(0,1)\neq 2(0,1)+3(0,1)=(0,1)+(0,1)=(0,2)$

3) Enoncez et démontrez le théorème d' al-Kashi (qui généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles). Avant de vous lancer dans des calculs, n'oubliez pas de préciser le contexte dans lequel vous travaillez.
(voir cours)

II. Calcul matriciel et déterminants

1) Définissez la multiplication usuelle des matrices réelles.
(voir cours)

2) Démontrez à l'aide d'un exemple choisi dans $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que cette multiplication n'est pas commutative.
$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$.

3) Voici la matrice $\begin{pmatrix}1&4&-3\\2&3&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$

a) Calculez son déterminant par la méthode des cofacteurs en détaillant vos calculs.

$$\text{dét}\begin{pmatrix}1&4&-3\\2&3&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{cofacteurs}\\\text{de L1}}}{=}1\begin{vmatrix}3&1\\-2&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&3\\2&-2\end{vmatrix}=1\cdot5-0-3\cdot(-10)=35$$

b) Calculez ensuite son inverse.

$$\begin{pmatrix}1&4&-3\\2&3&1\\2&-2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}5&2&13\\0&7&-7\\-10&10&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}&\frac{2}{35}&\frac{13}{35}\\0&\frac{1}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{-2}{7}&\frac{2}{7}&\frac{-1}{7}\end{pmatrix}$$

4) Quelles sont les valeurs réelles du paramètre λ pour lesquelles le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\2\lambda&2\lambda&\lambda\\3\lambda&\lambda+2&\lambda+1\end{pmatrix}$ égale zéro ?

$$\text{dét}\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\2\lambda&2\lambda&\lambda\\3\lambda&\lambda+2&\lambda+1\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{mise en évidence}\\\text{de }\lambda\text{ dans C1}}}{=}\lambda\cdot\text{dét}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2\lambda&\lambda\\3&\lambda+2&\lambda+1\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{L2}\backslash\text{L2}-2\text{L1}\\\text{L3}\backslash\text{L3}-3\text{L1}}}{=}\lambda\cdot\text{dét}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2\lambda-2&\lambda-2\\0&\lambda-1&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\cdot\text{dét}\begin{pmatrix}2\lambda-2&\lambda-2\\\lambda-1&\lambda-2\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{mise en évidence}\\\text{de }\lambda-1\text{ dans C1}\\\text{et de }\lambda-2\text{ dans C2}}}{=}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\text{dét}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Ce déterminant est nul ssi $\lambda\in\{0,1,2\}$.

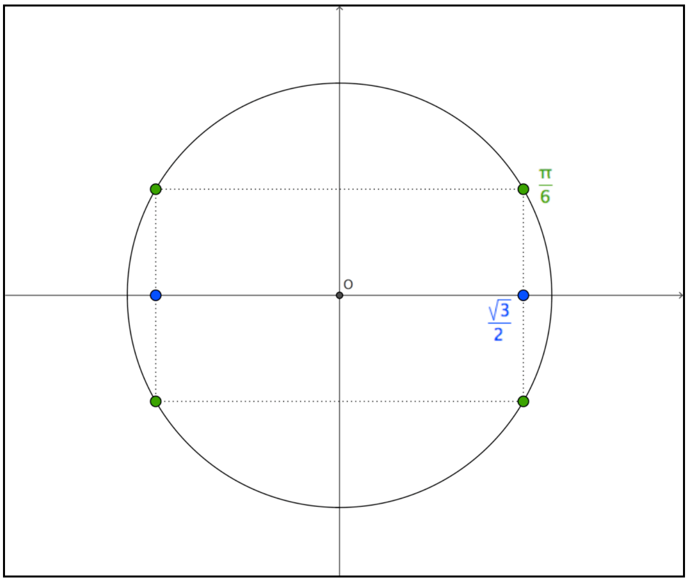
III. Trigonométrie

1) Enoncez et démontrez la formule de Simpson qui exprime la somme de deux sinus.
(voir cours)

2) Résolvez l'équation suivante et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique :

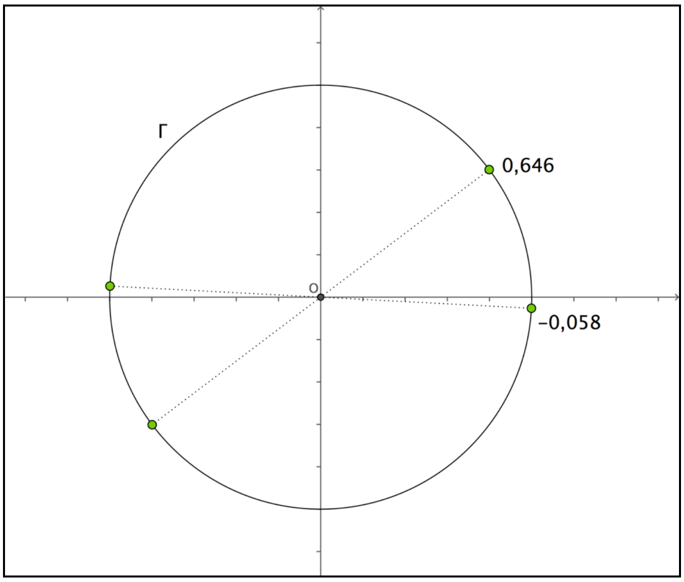
a) $2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 2,75$.
Vu que $2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2$ (formule fondamentale),
on déduit $\cos^2 x = 0,75$ et $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dès lors, $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



b) $2\sin 2x + 3\cos 2x = 2,75$
Calculons
$\cos 2x + \dfrac{2}{3}\sin 2x = \dfrac{2,75}{3}$

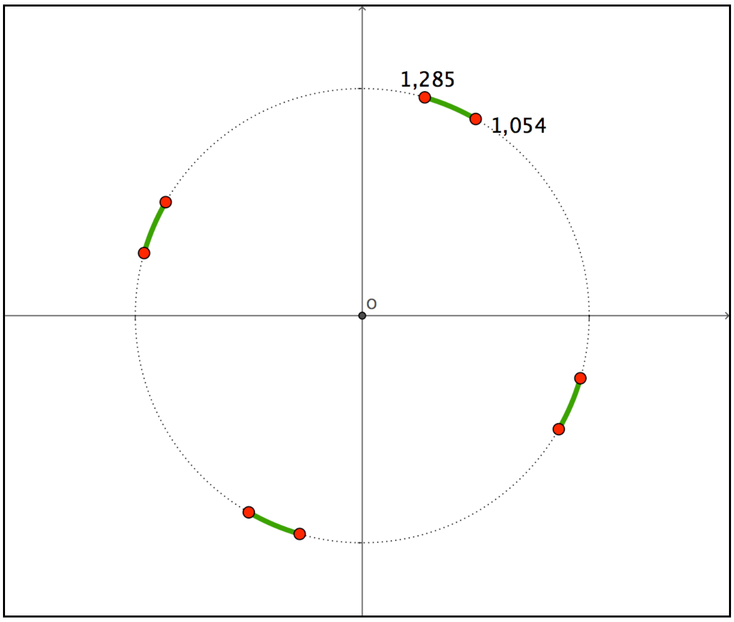
prenons $\varphi = 0,588$ de sorte que $tg\varphi = \dfrac{2}{3}$
en multipliant les deux membres de l'égalité par $\cos\varphi \cong 0,832$
on obtient:
$\cos 2x \cos + \sin 2x \sin\varphi = 0,7627$
$\cos(2x - \varphi) = 0,7627$
$2x - \varphi = 2k\pi \pm 0,7033$
$2x = 2k\pi \pm 0,7033 + 0,588$
$2x = 2k\pi + 1,291$ ou $2x = 2k\pi - 0,1153$
$x = k\pi + 0,646$ ou $x = k\pi - 0,058$



3) Résolvez l'inéquation suivante et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique :
$\operatorname{tg}(2x-1) > 2$

ssi $2x - 1 = \alpha + k\pi$ avec $1{,}107 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

ssi $x = \beta + k\dfrac{\pi}{2}$ avec $1{,}054 < \beta < 1{,}285$



IV. Fonctions numériques réelles.

1) Définissez : fonction - injection - surjection
(voir cours)

2) Voici les fonctions $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x + 1$

a) Sont-elles injectives ? Justifiez votre réponse.
f n'est pas injective car f(1) = f(3)
g est injective car $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \neq b \Rightarrow a + 1 \neq b + 1 \Rightarrow g(a) \neq g(b)$.

b) Sont-elles surjectives ? Justifiez votre réponse.
f est une surjection sur l'intervalle $[-1, \rightarrow[$, car le graphe de f est une parabole qui sourit et dont le minimum égale -1.
g est une surjection sur $\mathbb{R}$, car $\forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} : g(s) = r$. Il suffit de prendre $s = r - 1$.

c) Donnez les expressions analytiques de leurs composées $g \circ f$ et $f \circ g$.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4x + 3) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 3 = x^2 - 2x = x(x-2)$$

3) Déterminez le domaine de définition et les racines de

$$f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt{3 - x} \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 12}}$$

$$f(x) \text{ existe ssi } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad (1) \\ 3 - x > 0 \quad (2) \\ x^2 - 7x + 12 > 0 \quad (3) \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3 \quad (1) \\ x < 3 \quad (2) \\ x < 3 \text{ ou } x > 4 \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{dom} f =]\leftarrow, -1]$$

Il y a trois candidats au poste de racine : les réels qui annulent le numérateur de f(x), à savoir –1, 2 et 3. Mais 2 et 3 sont à rejeter car ils n'appartiennent pas à domf.
La seule racine est donc –1.