



CS de mathématique en 5SM-FM

- Veuillez traiter chaque question sur une double feuille à en-tête du Collège

I. Calcul vectoriel et produit scalaire

- 1) Définissez le produit scalaire usuel du plan vectoriel usuel π_0 et vérifiez sa commutativité.
- 2) Le plan \mathbb{R}^2 équipé de son addition habituelle et de la multiplication scalaire suivante $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ est-il un espace vectoriel réel ?
- 3) Énoncez et démontrez le théorème d'al-Kashi (qui généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles). Avant de vous lancer dans des calculs, n'oubliez pas de préciser le contexte dans lequel vous travaillez.

II. Calcul matriciel et déterminants

- 1) Définissez la multiplication usuelle des matrices réelles.
- 2) Démontrez à l'aide d'un exemple choisi dans $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ que cette multiplication n'est pas commutative.

3) Voici la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculez son déterminant par la méthode des cofacteurs en détaillant vos calculs.
 - b) Calculez ensuite son inverse.
- 4) Quelles sont les valeurs réelles du paramètre λ pour lesquelles le déterminant de la matrice suivante égale zéro ?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \\ 3\lambda & \lambda + 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

III. Trigonométrie

- 1) Énoncez et démontrez la formule de Simpson qui exprime la somme de deux sinus.
- 2) Résolvez l'équation suivante et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique :
 - a) $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 2,75$
 - b) $2 \sin 2x + 3 \cos 2x = 2,75$
- 3) Résolvez l'inéquation suivante et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique : $\text{tg}(2x - 1) > 2$

IV. Fonctions numériques réelles.

- 1) Définissez : fonction - injection - surjection
- 2) Voici les fonctions $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x + 1$
 - a) Sont-elles injectives ? Justifiez votre réponse.
 - b) Sont-elles surjectives ? Justifiez votre réponse.
 - c) Donnez les expressions analytiques de leurs composées $g \circ f$ et $f \circ g$.
- 3) Déterminez le domaine de définition et les racines de

$$f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 12}}$$