I. Analyse combinatoire.

A. 1) Enoncez et démontrez la formule qui exprime le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.
(voir cours)

2) Dressez un tableau qui fait le lien entre les notions traditionnelles d'arrangements et de combinaisons en tant que listes de n objets pris p à p et leur vision moderne faisant intervenir ensembles et fonctions.

Arrangement simple de n objets pris p à p	=	Injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments
Le nombre de ces arrangements simples, noté A_n^p	=	Le nombre de ces injections = $\frac{n!}{(n-p)!}$
Arrangement à répétition de n objets pris p à p	=	Fonction d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments
Le nombre de ces arrangements à répétition, noté α_n^p	=	Le nombre de ces fonctions = n^p
Combinaison simple de n objets pris p à p	=	Partie à p éléments d'un ensemble à n éléments
Le nombre de ces combinaisons simples, noté C_n^p	=	Le nombre de ces parties = $\frac{n!}{p!(n-p)!}$

B. 1) Cinq voitures viennent se garer en même temps sur un parking de cinq places. Combien de dispositions différentes sont possibles ?
Une disposition égale une bijection de l'ensemble des voitures $\{a,b,c,d,e\}$ dans l'ensemble des places de parking $\{1,2,3,4,5\}$. Il y a 5 ! = 120 telles bijections.

2) D'une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5, on tire successivement avec remise 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Un tirage égale une fonction de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans l'ensemble des boules.
Il y a $5^3 = 125$ telles fonctions.

3) Dans une course de 7 chevaux, combien y a-t-il de « tiercés dans l'ordre » possibles ?
Un tiercé égale un arrangement simple de 3 chevaux. Comme ils sont choisis parmi 7, il y a
$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210$ tiercés.

4) D'une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9 , on tire simultanément 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Un tel tirage égale une partie à 3 éléments d'un ensemble à 9 éléments.
Il y a donc $C_9^3 = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,6!} = 84$ tirages possibles.

5) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes contiennent exactement 2 valets ?
Un telle main égale un couple constitué d'une paire de valets et d'un triplet de cartes dont on exclut les valets.Or il y a C_4^2 paires de valets et C_{28}^3 triplets de cartes non valet.
D'où $C_4^2 \cdot C_{28}^3 = 6 \cdot 3276 = 19656$ couples recherchés.

6) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes contiennent exactement 2 valets et 2 rois ?

Même raisonnement qu'à la question précédente, mais cette fois on s'intéresse à des triples (2valets, 2rois, 1 carte). On en compte $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^1 = 864$.

7) D'une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues, on tire simultanément 3 boules. Combien de tirages distincts sont possibles sachant qu'on ne distingue pas les boules de même couleur ?
Les boules n'étant pas numérotées, il y a 4 tirages : $\{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\}$ et $\{B,B,B\}$.

8) D'une urne contenant 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules bleues numérotées de 1 à 3, on tire simultanément 3 boules. Combien de tirages différents sont possibles sachant qu'on distingue les boules de même couleur par leur numéro ?
Un tel tirage est tout simplement une partie à 3 éléments de l'ensemble des 8 boules.
Il y en a $C_8^3 = 56$.

9) D'une urne contenant 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 2 boules bleues numérotées de 1 à 2, on tire 3 boules successivement avec remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Voici quelques tirages tous différents : R1R2R3, R2R2B1, R2B1R2, …
Un tel tirage égale une fonction de $\{1,2,3\}$ dans l'ensemble des boules.
On compte $\alpha_5^3 = 5^3 = 125$ tels tirages.

10) Dans l'alphabet on considère qu'il y a 26 lettres différentes. Combien de mots de 5 lettres commençant par T peut-on écrire, les mots ne contenant qu'une seule fois la même lettre ?
La question revient à compter le nombre de mots de 4 lettres différentes autres que T. Un tel mot égale un arrangement de 4 lettres choisies parmi 25 lettres. Il y en a $A_{25}^4 = 303600$.

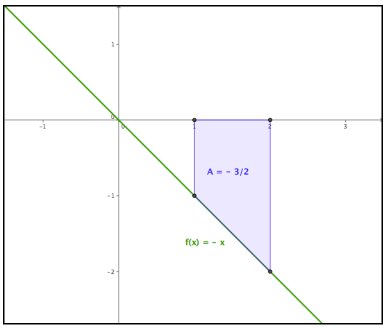
II. Primitives et intégrales

A. 1) Définissez la notion de **primitive** et donnez-en un exemple.
Voici F et f des fonctions numériques réelles
F est primitive de f ssi f est dérivée de F
EX : $F(x) = x^2 + 3$ est primitive de $f(x) = 2x$

2) Définissez la notion d'**intégrale** et donnez-en un exemple.
Voici f une fonction numérique continue définie sur un intervalle $[a,b]$
L'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f$, égale l'aire algébrique (ou signée) de la surface comprise entre le graphe cartésien de f, l'axe X et les droites verticales d'abscisses a et b.

EX : Considérons la fonction continue $f(x) = -x$.
Son intégrale sur l'intervalle $[1,2]$, notée $\int_1^2 f$, est égale à l'aire algébrique du trapèze de la figure ci-contre.

On calcule facilement l'aire géométrique du trapèze puisque ses dimensions sont
B = 2, b = 1, h = 1.
On adapte ensuite son signe.



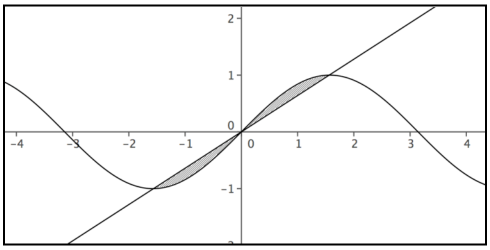
3) Enoncez le théorème fondamental de l'Analyse et expliquez pourquoi les mathématiciens lui ont attribué le qualificatif « fondamental ».
(voir cours)

B. 1) Calculez successivement

a) $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx \underset{\substack{\text{primitive}\\ \text{immédiate}}}{=} \frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+k$

b) $\int \frac{1}{3x^2+5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{3}{5}x^2+1}dx = \frac{1}{5}\frac{\text{Arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}\ x}{\sqrt{\frac{3}{5}}}+k = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\text{Arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}}\ x+k = \frac{1}{\sqrt{15}}\text{Arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}}\ x+k$

2) Calculez l'aire géométrique de la surface comprise entre les fonctions $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\frac{2x}{\pi}$.



On observe que les graphes cartésiens de f et g se coupent aux points $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

On constate aussi que la figure dont on doit calculer l'aire A est parfaitement symétrique par rapport au centre (0,0) (parce que les fonctions f et g sont impaires).
Dès lors,

$$A = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f-g) = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)dx = 2\cdot\left[-\cos x-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[0-\frac{\pi}{4}-(-1)+0\right] = 2-\frac{\pi}{2}\cong 0,429$$

3) Calculez le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface délimitée par une boucle de la fonction sinus et l'axe X.

$$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx \underset{\text{Carnot}}{=} \pi\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}[\pi-0-0+0] = \frac{\pi^2}{2}\cong 4,935.$$