I. Nombres complexes et fonctions cyclométriques

1. voir cours
2. Calculez les solutions de $x^5 + 2 - i\sqrt{5} = 0$.
   $x_1 = 1{,}116 + 0{,}553\ i$
   $x_2 = -0{,}181 + 1{,}232\ i$
   $x_3 = -1{,}228 + 0{,}209\ i$
   $x_4 = -0{,}578 - 1{,}104\ i$
   $x_5 = 0{,}871 - 0{,}891\ i$
3. voir cours
4. Vérifiez que $\forall x \in \mathbb{R} : \text{Arctg} x + \text{Arc cotg}\, x = \dfrac{\pi}{2}$
   Considérons la fonction $f(x) = \text{Arctg} x + \text{Arc cotg}\, x$.
   Sa dérivée étant nulle, elle est constante.
   Or $f(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc f est la fonction constante $\dfrac{\pi}{2}$.

II. Analyse combinatoire

1. voir cours
2. D'une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules bleues, on tire simultanément 3 boules. Combien de tirages distincts sont possibles sachant qu'on ne distingue pas les boules de même couleur ?
   Les boules n'étant pas numérotées, il y a 4 tirages : $\{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\}$ et $\{B,B,B\}$.
3. D'une urne contenant 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 3 boules bleues numérotées de 1 à 3, on tire simultanément 3 boules. Combien de tirages différents sont possibles sachant qu'on distingue les boules de même couleur par leur numéro ?
   Un tel tirage est tout simplement une partie à 3 éléments de l'ensemble des 8 boules.
   Il y en a $C_8^3 = 56$.
4. D'une urne contenant 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 2 boules bleues numérotés de 1 à 2, on tire 3 boules successivement avec remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Voici quelques tirages tous différents : R1R2R3, R2R2B1, R2B1R2, …
   Un tel tirage égale une fonction de $\{1,2,3\}$ dans l'ensemble des boules.
   On compte $\alpha_5^3 = 5^3 = 125$ tels tirages.
5. Calculez la somme de tous les nombres naturels constitués de quatre chiffres différents appartenant à l'ensemble $\{2,3,4,5,6,7,8\}$
   Il y a $A_7^4 = 840$ nombres décrits ci-dessus. 120 d'entre eux ont le chiffre 2 comme chiffre des unités, 120 ont le chiffre 3 comme chiffre des unités … 120 ont le chiffre 8 comme chiffre des unités.
   La somme de leurs unités est donc $120(2+3+4+5+6+7+8) = 4200$
   Idem pour les chiffres des dizaines, des centaines et des milliers.

Somme des unités :	4200
Somme des dizaines :	42000
Somme des centaines :	420000
Somme des milliers :	4200000
La somme totale :	4666200

III. Primitives et intégrales

A. voir cours

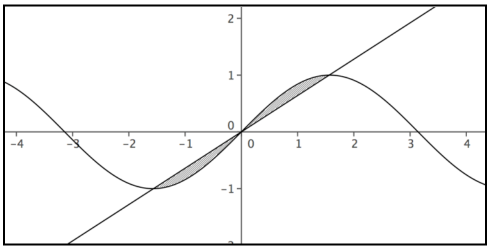
B. 1. Calculez successivement

a) $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+k$

b) $\int \frac{1}{3x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{Arctg}\sqrt{\tfrac{3}{5}}\ x+k$

c) $\int \frac{3x^2}{x^2-1}dx = \frac{3}{2}\left(2x+\ln\left(x-1\right)-\ln\left(x+1\right)\right)+k$

2. Calculez l'aire géométrique de la surface comprise entre les fonctions $f\left(x\right)=\sin x$ et $g(x)=\frac{2x}{\pi}$.



On observe que les graphes cartésiens de f et g se coupent aux points $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

On constate aussi que la figure dont on doit calculer l'aire A est parfaitement symétrique par rapport au centre (0,0) (parce que les fonctions f et g sont impaires).
Dès lors,

$$A = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f-g\right) = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{2x}{\pi}\right)dx = 2\cdot\left[-\cos x-\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[0-\frac{\pi}{4}-\left(-1\right)+0\right] = 2-\frac{\pi}{2}\cong 0,429$$

3. Calculez le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe X de la surface délimitée par une boucle de la fonction sinus et l'axe X.

$$V = \pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx \underset{\text{Carnot}}{=} \pi\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx = \frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\left[\pi-0-0+0\right] = \frac{\pi^2}{2}\cong 4,935.$$

IV. Coniques

Voici l'ellipse d'équation $16x^2+25y^2-400=0$.

a. Déterminez les coordonnées de son centre, de ses foyers et de ses sommets.
centre (0,0), foyers (–3,0) et (3,0), sommets (±5,0) et (0,±4)

b. Déterminez une équation cartésienne de son axe focal, de son axe non focal, de ses directrices, de son cercle principal et de son cercle secondaire.

axe focal $\equiv y=0$, axe non focal $\equiv x=0$, directrices $\equiv x=\pm\frac{25}{3}$, cercle principal $\equiv x^2+y^2=25$,

cercle secondaire $\equiv x^2+y^2=16$

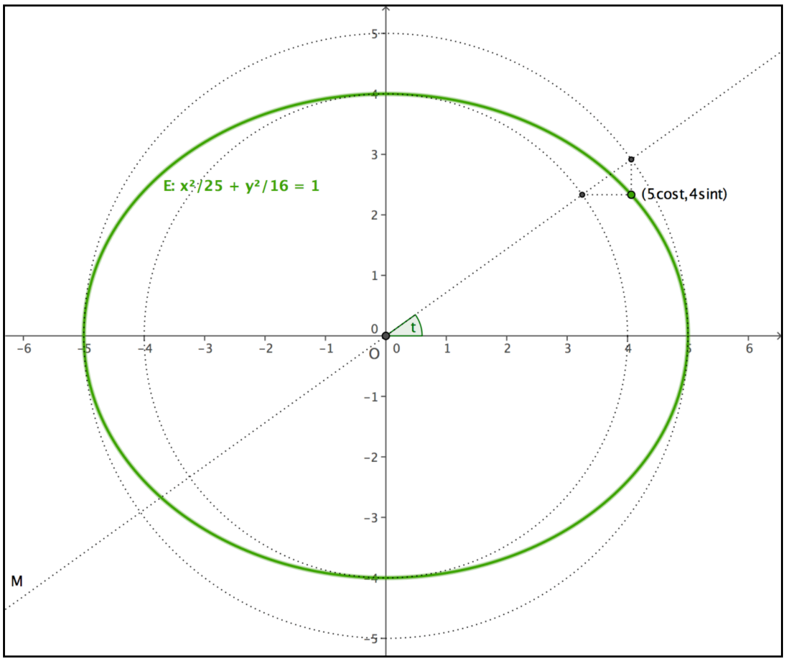
c. Calculez sa distance focale et son excentricité.

distance focale = 6, excentricité = $\frac{3}{5}=0,6$

d. Donnez-en une équation focale et des équations paramétriques.

équation focale $\equiv \sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2} = \frac{3}{5}\left|x-\frac{25}{3}\right|$, équations paramétriques $\equiv \begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$

e. Faites-en une construction par points (précisez la méthode choisie).
Par exemple, la méthode des cercles concentriques :



f. Déterminez ses points d'intersection avec la droite D d'équation y = x + 1.
(voir dessin page 3)

g. Déterminez une équation cartésienne (sous la forme y = ax + b) de sa tangente en son point d'abscisse – 2 et d'ordonnée positive.
(voir dessin ci-dessous)