PRIMITIVES ET INTEGRALES

1. a. Voir cours
   b. Voir cours
   c. Voir cours
   d. Voir cours

2. a. $\int \frac{x^3+2x-1}{x^3}dx = \int \left(1+2x^{-2}-x^{-3}\right)dx = x-\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+k$

   b. $\int_{-1}^{2} x\left(2x^2+5\right)^3 dx = \frac{1}{16}\left[\left(2x^2+5\right)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{16}\left[13^4-7^4\right] = 1635$

   c. $\int \frac{1}{3x^2+5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{3}{5}x^2+1}dx \underset{t=x\sqrt{\frac{3}{5}}}{=} \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{15}}\text{Arctg}\sqrt{\frac{3}{5}}\,x+k$

3. a. Comme au cours en remplaçant R par 3 : ce qui donne A=9π
   b. Comme au cours en remplaçant R par 3 : ce qui donne V=36π
   c. $A = \int_0^2 \left(2x-x^2\right)dx = \left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4-\frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1,333\ldots$

ANALYSE COMBINATOIRE

1. Voir cours.
2. 1) Quatre voitures viennent se garer en même temps sur un parking de quatre places. Combien de dispositions différentes sont possibles ?
   Une disposition égale une bijection de l'ensemble des voitures $\{a, b, c, d\}$ dans l'ensemble des places de parking $\{1, 2, 3, 4\}$. Il y a 4! = 24 telles bijections.

   2) D'une urne contenant 6 boules numérotées de 1 à 6, on tire successivement avec remise 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Un tirage égale une fonction de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans l'ensemble des boules.
   Il y a $6^3 = 216$ telles fonctions.

   3) Dans une course de 8 chevaux, combien y a-t-il de « tiercés dans l'ordre » possibles ?
   Un tiercé égale une injection de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans l'ensemble des 8 chevaux.
   Il y a donc $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336$ tiercés.

   4) D'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10 , on tire simultanément 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Un tel tirage égale une partie à 3 éléments d'un ensemble à 10 éléments.
   Il y a donc $C_{10}^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120$ tirages possibles.

   5) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 6 cartes contiennent exactement 2 dames?
   Un telle main égale un couple constitué d'une paire de dames et d'un quadruplet de cartes dont on exclut les dames. Or il y a C_4^2 paires de dames et C_{28}^4 quadruplets de cartes non dame.
   D'où $C_4^2 \cdot C_{28}^4 = 6 \cdot 20475 = 122850$ couples recherchés.

   6) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 6 cartes contiennent exactement 2 dames et 2 rois ?
   Même raisonnement qu'à la question précédente, mais cette fois on s'intéresse à des triples (2valets, 2rois, 2 cartes). On en compte $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^2 = 9936$.

   7) D'une urne contenant 6 boules vertes et 4 boules bleues, on tire simultanément 4 boules. Combien de tirages distincts sont possibles sachant qu'on ne distingue pas les boules de même couleur ?
   Les boules n'étant pas numérotées, il y a 5 tirages :
   $\{V, V, V, V\}, \{V, V, V, B\}, \{V, V, B, B\}, \{V, B, B, B\}$ et $\{B, B, B, B\}$.

   8) D'une urne contenant 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 4 boules bleues numérotées de 1 à 4, on tire simultanément 4 boules. Combien de tirages différents sont possibles sachant qu'on distingue les boules de même couleur par leur numéro ?
   Un tel tirage est tout simplement une partie à 4 éléments de l'ensemble des 10 boules.
   Il y en a $C_{10}^4 = 210$.

   9) D'une urne contenant 4 boules rouges numérotées de 1 à 4 et 3 boules bleues numérotées de 1 à 3, on tire 4 boules successivement avec remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   Voici quelques tirages tous différents : R1R2R3R4, R2R2B1R4, R2B1R2R4, …
   Un tel tirage égale une fonction de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble des boules.
   On compte $\alpha_7^4 = 7^4 = 2401$ tels tirages.

   10) Dans l'alphabet on considère qu'il y a 26 lettres différentes. Combien de mots de 6 lettres finissant par S peut-on écrire, les mots ne contenant qu'une seule fois la même lettre ?
   La question revient à compter le nombre de mots de 5 lettres différentes autres que S.
   Un tel mot égale une injection de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans l'ensemble des 25 lettres autres que S. Il y en a $A_{25}^5 = 6375600$.