Sujet 1. Géométrie et systèmes d'équations

1. a). Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite D de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(4,5,6)$ et $(3,2,1)$.
   b). Déterminez une équation cartésienne du plan δ de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $(4,3,0),(2,3,2)$ et $(0,3,4)$.

---

1. a) un vecteur directeur de D = (1, 3, 5)
   un point de passage de D = (4, 5, 6)
   équation cartésienne de D : $\frac{x-4}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-6}{5}$

1. b) Cette question est vicieuse car les trois points proposés sont alignés.
   En effet, chacun d'eux est un « cocktail » des deux autres.
   Par exemple : $(2,3,2)=\frac{1}{2}(4,3,0)+\frac{1}{2}(0,3,4)$, ce qui signifie que $(2,3,2)$ est pile au milieu du segment formé par les points $(4,3,0)$ et $(0,3,4)$.
   Ces trois points ne définissent donc pas un unique plan, mais tout un faisceau de plans.
   $\delta \equiv x+y+z=7$ est un de ces plans. On voit à l'oeil nu qu'il comprend les trois points proposés.
   $\varepsilon \equiv y=3$ en est un autre..
   Et grâce à Gauss, tous les plans qui passent par ces trois points ont une équation cartésienne de la forme : $\lambda x+(\lambda+\mu)y+\lambda z=7\lambda+3\mu$ où $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
   (Il s'agit de toutes les combinaisons linéaires possibles des équations de δ et ε).
   Ainsi par exemple, en posant $\lambda=2$ et $\mu=3$, on obtient le plan $\pi \equiv 2x+5y+2z=23$ qui passe effectivement par les trois points donnés.

---

2. Voici le point a, la droite A et le plan α de $\mathbb{R}^3$:

$$a=(1,2,3);\quad A \equiv \begin{cases} x=3\lambda+5 \\ y=2-3\lambda \\ z=4\lambda+2 \end{cases};\quad \alpha \equiv 4x+3y-2z+3=0$$

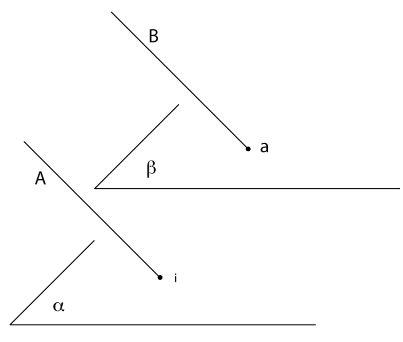
   a). Donnez un système d'équations paramétriques de la droite B passant par le point a et parallèle à la droite A.
   b). Donnez une équation cartésienne du plan β passant par le point a et parallèle au plan α.
   c). Calculez, s'il existe, le point de percée i de la droite A dans le plan α.
   d). Faites un schéma qui rassemble tous les éléments de cet exercice.

2a) $B \equiv \begin{cases} x=3\lambda+1 \\ y=2-3\lambda \\ z=4\lambda+3 \end{cases}$

2b) $\beta \equiv 4x+3y-2z-4=0$

2c) En résolvant le système des équations de A et α, on trouve
$\lambda = 5$, $x = 20$, $y = -13$, $z = 22$.
Donc $i=(20,-13,22)$

2d)



3. Exactement un des trois systèmes suivants est déterminé :

$$(1)\begin{cases}3x+2y+z=14\\x-2y+3z=5\\4x+4z=19\end{cases}\quad(2)\begin{cases}3x+2y+z=14\\3x+2y=9\\x-2y+z=0\end{cases}\quad(3)\begin{cases}3x+2y+z=14\\x-2y+3z=5\\4x+4z=18\end{cases}$$

a). Lequel des trois ? Calculez sa solution par la méthode de votre choix.
b). Quelle est la nature des deux autres systèmes ? Donnez-en une interprétation géométrique.

---

a) Le système (2) est déterminé. $S=\{(1,3,5)\}$
b) (1) est simplement indéterminé. Il représente trois plans qui se coupent en une droite.
(2) est impossible. Il représente trois plans qui se coupent 2 à 2 mais dont l'intersection est vide.

Voyez le cours et d'autres corrections pour toutes justifications.

Sujet 2. Analyse combinatoire et probabilités

1. Enoncez et démontrez la formule de Pascal.
2. Calculez le terme en x^2 et le terme en x^3 de $\left(3x+\frac{5}{x^2}\right)^9$.(Achevez vos calculs).

---

1. $C_n^p+C_n^{p+1}=C_{n+1}^{p+1}$
Voyez le cours.
2. Le terme général s'écrit : $C_9^i 3^i 5^{9-i} x^{3i-18}$
3i – 18 = 2 ssi 3i = 20 ce qui est impossible puisque i est un nombre naturel.
3i – 18 = 3 ssi i = 7
le terme en x^2 n'existe pas
le terme en x^3 = $C_9^7 3^7 5^2 x^3 = 36*2187*25*x^3 = 1968300x^3$

---

3. Dans cette classe il y a 12 filles et 6 garçons. Afin de récompenser deux élèves au moyen d'un prix spécial de mathématique, le professeur décide d'organiser un tirage au sort. Il dépose donc dans une urne 18 petits billets sur lesquels il a soigneusement noté les noms de ses élèves (un billet par élève) et après avoir bien mélangé le contenu de l'urne, il effectue un tirage de deux billets.
Calculez la probabilité que le tirage désigne comme lauréats :
a). Deux garçons
b). Un garçon et une fille
c). Deux filles
d). Exprimez chacun des résultats obtenus sous forme de décimal avec 6 chiffres après la virgule. Faites la somme de ces résultats et tirez-en une conclusion.

---

a) $p(2g)=\frac{C_6^2}{C_{18}^2}=\frac{15}{153}=\frac{5}{51}=0{,}098039$

b) $p(1g \text{ et } 1f)=\frac{C_6^1C_{12}^1}{C_{18}^2}=\frac{72}{153}=\frac{24}{51}=0{,}470588$

c) $p(2f)=\frac{C_{12}^2}{C_{18}^2}=\frac{66}{153}=\frac{22}{51}=0{,}431373$

d) $0{,}098039+0{,}470588+0{,}431373=1$
c'est tout à fait normal …

4. Un lanceur de fléchettes atteint une cible avec une probabilité évaluée à 0,35. Il lance 7 fois une fléchette.
   a). On se trouve devant un schéma de Bernoulli. Expliquez.
   b) Décrivez la variable aléatoire de ce schéma.
   c) Comment appelle-t-on la loi de probabilité de la variable aléatoire de ce schéma ?
   d). Dressez le tableau de cette loi de probabilité.
   e) Quel est le résultat le plus probable (espérance mathématique) ?
   f). Quelle est la probabilité que le lanceur atteigne la cible au moins une fois ?

a) L'expérience alatoire « lancer une fléchette » n'a que deux résultats possibles : succès = atteindre la cible, échec = rater la cible.. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli. Cette épreuve étant répétée 7 fois, et le résultat de l'une n'ayant pas d'influence sur l'autre, on se trouve devant un schéma de Bernoulli.
b) $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ associe à un 7-uple de $\{s,e\}$, le nombre de s qu'il compoorte.
c) loi binomiale
d) B(7, 0,35)

X	p(X)	X*p(X)
0	0,049022279	0
1	0,184776282	0,184776282
2	0,298484763	0,596969527
3	0,267870941	0,803612824
4	0,144238199	0,576952797
5	0,046600034	0,233000168
6	0,008364109	0,050184652
7	0,000643393	0,004503751
∑	1	2,45

REM : la troisième colonne de ce tableau est inutile. Elle ne figure-là que pour confirmer le point e) qui suit.

e) E[X] = n*p = 7*0,35 = 2,45.
f) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}049022279 \cong 0{,}95$.

Sujet 3. Logarithmes et exponentielles

1. Définissez la fonction logarithme népérienne et démontrez que ln est un morphisme de groupes. Précisez de quels groupes il s'agit.

voir cours

2. Voici la fonction $f(x)=\ln\left(e+1-x^3\right)$
   a). Quel est son domaine de définition ?
   b). Calculez sa dérivée.
   c). Déterminez une équation cartésienne de la tangente T au graphe de f au point d'abscisse 1. (Réponse sous la forme $T \equiv y = px+q$ où les réels p et q sont exprimés comme nombres décimaux avec deux chiffres derrière la virgule)

a) $\operatorname{dom} f = \left]\leftarrow, \sqrt[3]{e+1}\right] = \left]\leftarrow ; 1,549\right]$

b) $f'(x) = \dfrac{-3x^2}{e+1-x^3}$

c)
$$\left|\begin{array}{l} T \equiv y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \\ f(1) = \ln e = 1 \\ f'(1) = -\dfrac{3}{e} = -1,104 \\ T \equiv y - 1 = -\dfrac{3}{e}(x-1) \\ T \equiv y = -\dfrac{3}{e}x + 1 + \dfrac{3}{e} \\ T \equiv y = -1,10x + 2,10 \end{array}\right.$$

3. Résolvez $\ln^2 x - 4\ln x^2 + 7 = 0$.

4. Résolvez $e^{2x} - 7e^x + 12 \le 0$.

3. $\ln^2 x - 4\ln x^2 + 7 = 0$ ssi $\ln^2 x - 8\ln x + 7 = 0$ ssi $\ln x \in \{1,7\}$ ssi $x \in \{e, e^7\}$
   $S = \{e, e^7\}$

4. $e^{2x} - 7e^x + 12 \le 0$ ssi $3 \le e^x \le 4$ ssi $\ln 3 \le x \le \ln 4$
   $S = [\ln 3, \ln 4]$

5. Calculez $\int x \ln x \, dx$.

6. Calculez $\int_{-1}^{1} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} dx$.

5. Par parties :

$$u = \ln x, dv = x dx, du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k = \frac{1}{4}x^2\left(2\ln x - 1\right) + k$$

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch}(x) = [\operatorname{sh}(x)]_{-1}^{1} = \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(-1) = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) = e - \frac{1}{e} = 2,350$