A. COMBINATOIRE ET BINOME DE NEWTON

1. Enoncez et démontrez la formule de Pascal.
voir cours.

2a. En utilisant les cinq lettres a, b, c, d, e, combien peut-on former de mots de cinq lettres dans lesquels les lettres a et b ne sont pas voisines ?
Le nombre total de mots à 5 lettres = 5! = 120
Le nombre de mots où a et b sont voisines = 2 fois 4! = 48 (une fois dans l'ordre ab et une fois dans l'ordre ba)
Le nombre de mots où a et b ne sont pas voisines = 120 – 48 = 72.

b. Voici les ensembles $E = \{a,b,c,d,e\}$ et $F = \{u,v\}$. $\# E = 5$ et $\# F = 2$.
Combien y a-t-il de surjections de E sur F ?
Il y a 2^5 fonctions de E dans F.
Parmi ces fonctions, il y en a exactement 2 qui ne sont pas surjectives : la constante u et la constnte v.
Par conséquent, il y a $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$ surjections de E sur F.

c. Une classe de trente-cinq élèves comprend vingt filles et quinze garçons. On veut former un comité comprenant une présidente, un secrétaire et trois autres membres.
Combien y a-t-il de comités possibles ?
Un tel comité est un triple (a,b,c) où a est une présidente choisie parmi 20 candidates, b est un secrétaire choisi parmi 15 candidats et c est un triplet choisi parmi les 33 élèves restants.
Combien de tels triples (a,b,c) ?
$$20 \cdot 15 \cdot \binom{33}{3} = 20 \cdot 15 \cdot 5456 = 1636800.$$

3a. Enoncez la formule de Newton.
voir cours

b. Déterminez les termes en x^8 et x^9 de $\left(3x^4 - \frac{2}{x}\right)^7$

Le terme général du développement du binôme proposé = $\binom{7}{i}\left(\frac{-2}{x}\right)^i \left(3x^4\right)^{7-i} = \binom{7}{i}(-2)^i\, 3^{7-i} x^{28-5i}$

$28 - 5i = 8$ ssi $i = 4$

Donc le terme en x^8 = $\binom{7}{4}(-2)^4\, 3^3 x^8 = 35 \cdot 16 \cdot 27 \cdot x^8 = 15120x^8$.

$28 - i = 9$ pour aucun naturel i, il n'y a donc pas de terme en x^9.

B. COMPLEXES ET FONCTIONS CYCLOMETRIQUES

1. Enoncez et démontrez, par récurrence, la formule de Moivre.
   voir cours

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$: $z^5+\sqrt{3}+2i=0$ (solutions sous la forme a + bi)

La question revient à déterminer les racines cinquièmes du complexe $z=-\sqrt{3}-2i$.
L'écriture trigonométrique de z égale $\sqrt{7}$ cis $229{,}107°$

Remarquons que je préfère exprimer l'argument de z en degrés dans la mesure où, par la suite, il sera plus aisé de manipuler $\frac{k360°}{5}$ que $\frac{2k\pi}{5}$.

Nous recherchons $t=r\text{cis}\varphi$ tel que $t^5=z$ c'est-à-dire tel que $r^5\text{cis}5\varphi=\sqrt{7}\text{cis}229{,}107°$.

Ainsi : $r^5=\sqrt{7}$ et $5\varphi=229{,}107°+k360°$ (cfr égalité de complexes écrits sous forme trigonométrique)

Par conséquent : $r=\sqrt[10]{7}$ et $\varphi=\dfrac{229{,}107°+k360°}{5}$

En prenant successivement k = 0, 1, 2, 3, 4 nous obtenons les racines cinquièmes de z, à savoir :

$$t_0=\sqrt[10]{7}\text{ cis }45{,}821°=0{,}847+i\cdot 0{,}871$$
$$t_1=\sqrt[10]{7}\text{ cis }117{,}821°=-0{,}567+i\cdot 1{,}074$$
$$t_2=\sqrt[10]{7}\text{ cis }189{,}821°=-1{,}197-i\cdot 0{,}207$$
$$t_3=\sqrt[10]{7}\text{ cis }261{,}821°=-0{,}173-i\cdot 1{,}202$$
$$t_4=\sqrt[10]{7}\text{ cis }333{,}821°=1{,}090-i\cdot 0{,}536$$

3. Vous basant sur les formules de Moivre et de Newton, calculez $\cos 3\varphi$ et $\sin 3\varphi$.

$$\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi \underset{\text{en abrégé}}{=} \text{cis}3\varphi \underset{\text{Moivre}}{=} (\text{cis}\varphi)^3$$
$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3 \underset{\text{Newton}}{=} \cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\ i\sin\varphi+3\cos\varphi\ i^2\sin^2\varphi+i^3\sin^3\varphi$$
$$=\left(\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi\right)+i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)$$

En comparant le premier et le dernier membre de cette égalité et en vertu de l'égalité des nombres complexes, on déduit :

$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$ et $\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$

4. Résolvez : $\text{Arctg}2x-\text{Arctg}x=\text{Arctg}\frac{1}{3}$.

Calculons : $\text{tg}\left(\text{Arctg}2x-\text{Arctg}x\right)=\text{tg}\left(\text{Arctg}\frac{1}{3}\right)$

$\dfrac{2x-x}{1+2x^2}=\dfrac{1}{3}$; $1+2x^2=3x$; $2x^2-3x+1=0$

$x=1$ ou $\dfrac{1}{2}$

C. LOGARITHME NEPERIEN

1. Définissez la fonction logarithme népérien et démontrez qu'elle est un morphisme de groupes.
   voir cours.

2. Résolvez : $\ln\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln x=\ln\sqrt{3}$.
   Calculons successivement :
   $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{1}{2}\ln x=\frac{1}{2}\ln 3$; $\ln\left(x^2+2\right)-\ln x=\ln 3$; $\ln\frac{x^2+2}{x}=\ln 3$;
   $\frac{x^2+2}{x}=3$; $x^2-3x+2=0$; $x=1$ ou $x=2$

3. Déterminez une équation cartésienne de la tangente à f au point d'abscisse a, sachant que
   $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ et $a=e$
   La tangente T a pour équation : $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$
   Or $f(e)=\frac{1}{e}$ et comme $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(e)=0$.
   Donc $T\equiv y=\frac{1}{e}$

4. Calculez $\int x\ln x dx$ et $\int \text{séc}x dx$.

   $\int x\ln x dx$ se calcule par parties. On pose u = lnx et dv = xdx. D'où $du=\frac{1}{x}dx$ et $v=\frac{x^2}{2}$.
   Dès lors, $\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+k=\frac{x^2}{4}\left(2\ln x-1\right)+k$

   $$\int \text{séc}x dx=\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)}dx$$
   $$=\int\frac{\frac{1}{2}\cos x}{1-\sin x}dx+\int\frac{\frac{1}{2}\cos x}{1+\sin x}dx=-\frac{1}{2}\ln\left|1-\sin x\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1+\sin x\right|+k$$
   $$=\ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|}+k$$

D. EXPONENTIELLE

On considère la fonction cosinus hyperbolique définie par $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Esquissez le graphe cartésien de **ch** et caractérisez son « look ».
   voir cours.

2. Calculez l'aire A de la surface S comprise entre **ch**, l'axe X et les droites verticales d'équations x = – 2 et x = 2.

   $$A = \int_{-2}^{2} \operatorname{ch}x\,dx = [\operatorname{sh}x]_{-2}^{2} = \operatorname{sh}(2) - \operatorname{sh}(-2) = 2\operatorname{sh}(2) = e^2 - \frac{1}{e^2} \cong 7{,}254$$

3. Calculez le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de S autour de l'axe X.

   $$V = \pi\int_{-2}^{2} \operatorname{ch}^2x\,dx \underset{\text{Carnot}}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}(1+\operatorname{ch}2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sh}2x}{2}\right]_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left[2 + \frac{\operatorname{sh}4}{2} - (-2) - \frac{\operatorname{sh}(-4)}{2}\right]$$

   $$= \frac{\pi}{2}[4 + \operatorname{sh}4] = 49{,}150$$

4. Calculez l'aire L de la surface de révolution engendrée par la rotation de $\operatorname{ch}_{[-2,2]}$ autour de l'axe X.

   $$L = 2\pi\int_{-2}^{2} \operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\,dx \underset{1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x}{=} 2\pi\int_{-2}^{2}\operatorname{ch}^2x\,dx \underset{\text{EX3}}{=} 2\cdot 49{,}150 = 98{,}300$$