Question 1 : Probabilités et statistiques

1. Une enveloppe contient 20 pièces de monnaie, 16 non truquées et 4 dont la probabilité d'avoir face est 0,70. On choisit une pièce au hasard et on la lance deux fois. Quelle est la probabilité d'avoir choisi une pièce truquée sachant que l'on a obtenu deux fois face ?

T = la pièce choisie est truquée
F = la pièce indique face

$$p(T)=\frac{4}{20}=0,2\ ;\ p(\text{non}T)=\frac{16}{20}=0,8\ ;\ p(F|T)=0,7\ ;\ p(F|\text{non}T)=0,5\,.$$

expérience aléatoire : on choisit une pièce au hasard et on la lance deux fois.

2F = obtenir deux fois face
on demande $p(T|2F)$

Par Bayes : $p(T|2F)=\dfrac{p(T\cap 2F)}{p(2F)}$

Or $p(T\cap 2F)=p(2F\cap T)\underset{\text{Bayes}}{=}p(2F|T)\cdot p(T)=0,7^2\cdot 0,2=0,098$

et $p(2F)\underset{\text{proba totales}}{=}p(2F|T)\cdot p(T)+p(2F|\text{non}T)\cdot p(\text{non}T)=0,7^2\cdot 0,2+0,5^2\cdot 0,8=0,298$

Donc $p(T|2F)=\dfrac{0,098}{0,298}=0,329$

2. Lors d'un examen écrit, un étudiant se voit proposer une série de 7 questions à choix multiples. Quatre réponses sont proposées à chaque question, une seule est correcte. L'étudiant répond au hasard à chaque question.
   a. Décrivez la variable aléatoire associée à cette expérience aléatoire.
   b. Dressez le tableau de la loi de probabilité de cette variable.
   c. Quel est le résultat le plus probable (espérance mathématique) et quel est l'écart type ?
   d. Quelle est la probabilité de réussite de l'étudiant (au moins 5 sur 10) ?

s = succès = cocher une bonne réponse ; p(s) = p = 0,25.
e = échec = cocher une mauvaise réponse ; p(e) = q = 0,75.

a) $X:\{s,e\}^7\longrightarrow\mathbb{R}$ associe à chaque 7-uple de {s,e} son nombre de s.

b) tableau de B(7 ; 0,25)

X	p(X)
0	0,133483887
1	0,311462402
2	0,311462402
3	0,173034668
4	0,057678223
5	0,011535645
6	0,001281738
7	0,000061035

c) E[X] = np = 7*0,25 = 1,75
$\sigma[X] = \sqrt{npq}=\sqrt{7*0,25*0,75}=1,14$

d) $p(X\geq 4) = \sum_{X=4}^{7} p(X)=0,07$

Question 2 : Coniques

Voici la conique C d'équation $5x^2 - 8xy + 5y^2 + 18x - 18y + 9 = 0$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.

a). Quel est le genre affine de C ?

b). Quelles transformations du plan faut-il appliquer au repère $\mathcal{R}_1$ pour que l'équation de C dans le nouveau repère $\mathcal{R}_3$ ainsi obtenu apparaisse sous sa forme réduite ?

c). Déterminez l'équation de C dans le repère $\mathcal{R}_3$.

Dans la suite de cet exercice, les nombres seront écrits sous forme décimale avec deux chiffres après la virgule et les équations de droites seront exprimées sous la forme y = ax + b.

d). Déterminez l'excentricité de C ainsi que les coordonnées des centre, foyers et sommets de C dans $\mathcal{R}_1$ et dans $\mathcal{R}_3$.

e). Déterminez les équations des axes de symétrie, des directrices et des asymptotes de C dans $\mathcal{R}_1$ et dans $\mathcal{R}_3$.

f). Faites un dessin dans $\mathcal{R}_1$ de toutes les informations collectées ci-dessus.

a) $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 9 \\ -4 & 5 & -9 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$; $C^{33} = 9 > 0$; C est une ellipse. Elle est non dgénérée puisque détC $\neq 0$.

b) Le centre de C est le point $(-1,1)$

On fait d'abord une translation du repère de vecteur le centre de C. L'équation de C se transforme en remplaçant x par x – 1 et y par y + 1.

D'où : $C_2 \equiv 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$.

On fait ensuite une rotation du repère d'angle α (à déterminer). Cette opération fera disparaitre le terme en xy.

On remplace x par $x\cos\alpha - y\sin\alpha$ et y par $x\sin\alpha + y\cos\alpha$ dans l'équation C_2.

$C_3 \equiv 5(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 8(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 5(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 9 = 0.$

Le coefficient du terme en xy est nul.

Donc : $-10\sin\alpha\cos\alpha - 8\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha + 10\sin\alpha\cos\alpha = 0$; $\cos 2\alpha = 0$; $\alpha = 45°$ ou $-45°$.

Prenons alpha = 45° et C_3 devient :

$C_3 \equiv \frac{5}{2}(x-y)^2 - 4(x-y)(x+y) + \frac{5}{2}(x+y)^2 - 9 = 0.$

$C_3 \equiv x^2 + 9y^2 = 9$

$C_3 \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

C'est la « bonne » forme réduite.

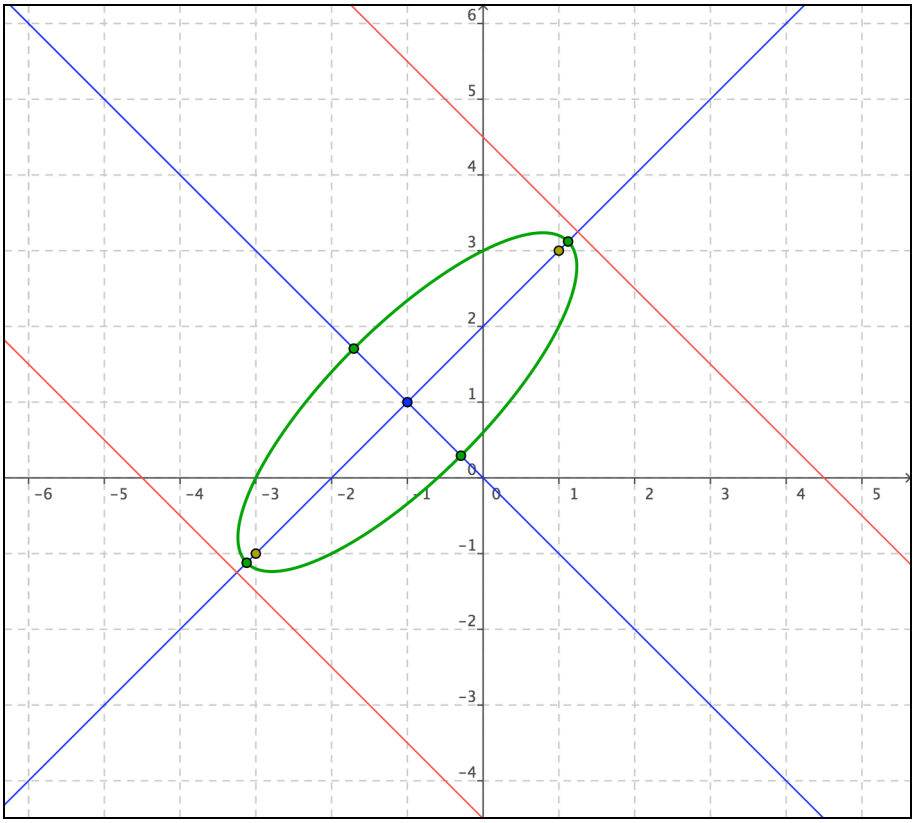
a = 3 ; b = 1 ; c = 2√2 ; e = 0,943

Question 2 : Coniques (suite)

Collecte des résultats :

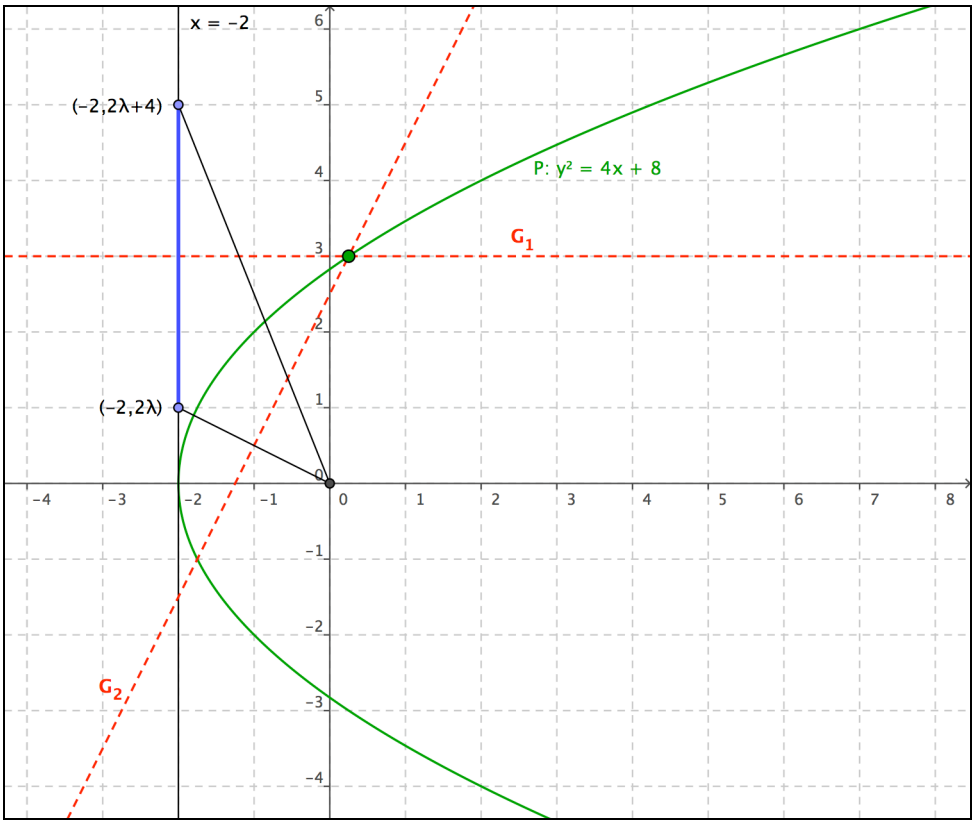
	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_3$
genre affine de C et excentricité	ellipse d'excentricité 0,943	
équation de C	$5x^2-8xy+5y^2+18x-18y+9=0$	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$
centre	$(-1,1)$	$(0,0)$
foyers	$(1,3)\ (-3,-1)$	$(2.83,0)\ (-2.83,0)$
sommets	$(1.12,3.12)\ (-3.12,-1.12)$ $(-1.71,1.71)\ (-0.29,0.29)$	$(3,0)(-3,0)$ $(0,1)\ (0,-1)$
axes de symétrie	$y=-x$ $y=x+2$	$x=0$ $y=0$
directrices	$y=-x+4,5$ $y=-x-4,5$	$x=3,18$ $x=-3,18$
asymptotes	///	///

Graphe des résultats :



Question 3 : Lieux et coordonnées polaires

1. Dans le plan équipé d'un repère cartésien orthonormé, on donne un triangle variable oab dont le sommet o est l'origine du repère et dont le côté ab, de longueur constante 4, est situé sur la droite d'équation $x = -2$.
Déterminez l'équation cartésienne du lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle, ainsi que sa nature. Faites aussi un graphe de ce lieu en indiquant clairement la construction d'un de ses points.



Au point a on donne la coordonnée $(-2,2\lambda)$ et à b la coordonnée $(-2,2\lambda+4)$.

$G_1 \equiv y = 2\lambda + 2$

$G_2 \equiv y = \frac{1}{\lambda}x + \lambda + \frac{1}{\lambda}$

On élimine le paramètre lambda du système G1 G2
et on obtient : $L \equiv y^2 = 4x + 8$.

C'est une parabole de sommet $(-2,0)$ et passant par $(0,\pm 2\sqrt{2})$.

Elle est la translatée de $M \equiv y^2 = 4x$ par la translation de vecteur $(-2,0)$.

Or le foyer de M est le point $(1,0)$. Celui de L est donc $(-1,0)$.

Et la directrice de L est la droite $D \equiv x = -3$.

Question 3 : Lieux et coordonnées polaires (suite)

2. Déterminez les éléments de symétrie et les points particuliers de la courbe d'équation polaire $\rho = \cos 2\omega$. Faites ensuite un graphe de cette courbe.

1. Eléments de symétrie

- La droite contenant l'axe polaire est axe de symétrie de C car $\cos 2\omega = \cos 2(-\omega)$.
- Le pôle est centre de symétrie de C car $\cos 2\omega = \cos 2(\omega + \pi)$.
- La perpendiculaire par le pôle à l'axe polaire est axe de symétrie car $\cos 2\omega = \cos 2(\pi - \omega)$.

2. Points particuliers

- Intersection de C avec la droite contenant l'axe polaire : $(1,0)$ et $(1,\pi)$.
- Intersection de C avec la perpendiculaire par le pôle à l'axe polaire : $\varnothing$ car $\omega = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \rho = -1$
- Les points de C les plus éloignés horizontalement du pôle : on les obtient en annulant la dérivée de $\rho\cos\omega$ par rapport à ω.

  $(\rho\cos\omega)'_\omega = (\cos 2\omega \cdot \cos\omega)'_\omega = \ldots = \sin\omega\left(1 - 6\cos^2\omega\right) = 0$ ssi $\sin\omega = 0$ ou $\cos\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

  $\sin\omega = 0$ pour $\omega = 0$ ou π. Dans ces cas, $\rho = 1$

  $\cos\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ pour $\omega = \pm 1{,}15$ ou $\omega = \pm 1{,}99$. Dans ces cas, $\rho < 0$.

  Les points recherchés sont donc $(1,0)$ et $(1,\pi)$.
- Les points de C les plus éloignés verticalement du pôle : on les obtient en annulant la dérivée de $\rho\sin\omega$ par rapport à ω.

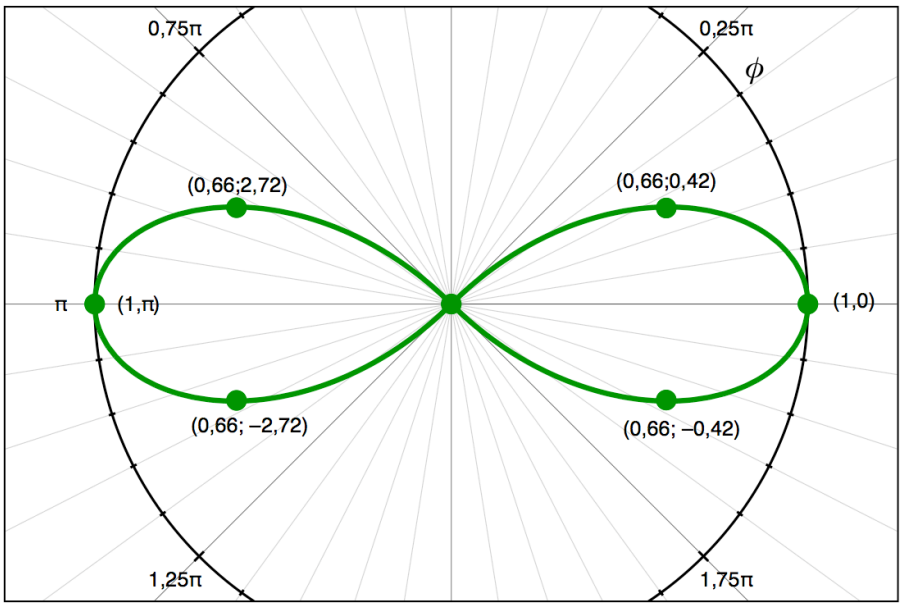
  $(\rho\sin\omega)'_\omega = (\cos 2\omega \cdot \sin\omega)'_\omega = \ldots = \cos\omega\left(1 - 6\sin^2\omega\right) = 0$ ssi $\cos\omega = 0$ ou $\sin\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

  $\cos\omega = 0$ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ ou $3\frac{\pi}{2}$. Dans ces cas, $\rho = -1$.

  $\sin\omega = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ pour $\omega = \pm 0{,}42$ ou $\pm 2{,}72$. Dans ces cas $\rho = 0{,}66$.

  Les points recherchés sont donc $(0{,}66\ ;\ \pm 0{,}42)$ et $(0{,}66\ ;\ \pm 2{,}72)$.

3. Graphe



Question 4 : Logarithmes et exponentielles

1. Calculez : a) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+9}dx$ b) $\int x\ln x dx$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{4x-2}$

a) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+9}dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+9}dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2+9}dx = \left[\ln\left(x^2+9\right) + \text{Arctg}\frac{x}{3}\right]_0^1 = \ln 10 - \ln 9 + \text{Arctg}\frac{1}{3} = 0,427$

b) $\int x\ln x dx \underset{\text{par parties}}{=} \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + k = \frac{1}{4}x^2\left(2\ln x - 1\right) + k$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{4x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{4(x+3)-14} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{4(x+3)}}{\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{14}} = \frac{\left(e^2\right)^4}{1} = e^8 = 2980,96$

2. Résolvez dans $\mathbb{R}$:

$$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{12}\right) = 2x - \log_4\left(2^x+\sqrt{12}\right)^2 \quad \text{ou} \quad 2+\log_2\left(2^x-\sqrt{5}\right) = 2x - \log_4\left(2^x+\sqrt{5}\right)^2$$

$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{12}\right) = 2x - \log_4\left(2^x+\sqrt{12}\right)^2$

$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{12}\right) = 2x - \frac{2\log_2\left(2^x+\sqrt{12}\right)}{\log_2 4}$

$\log_2\left(2^x-\sqrt{12}\right) + \log_2\left(2^x+\sqrt{12}\right) = 2x-2$

$\log_2\left(2^x-\sqrt{12}\right)\left(2^x+\sqrt{12}\right) = 2x-2$

$2^{2x} - 12 = 2^{2x-2}$

$2^{2x} - 12 = \frac{2^{2x}}{4}$

$4\cdot 2^{2x} - 48 = 2^{2x}$

$2^{2x} = 16$

$2x = 4$

$x = 2$

$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{5}\right) = 2x - \log_4\left(2^x+\sqrt{5}\right)^2$

$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{5}\right) = 2x - \frac{2\log_2\left(2^x+\sqrt{5}\right)}{\log_2 4}$

$\log_2\left(2^x-\sqrt{5}\right) + \log_2\left(2^x+\sqrt{5}\right) = 2x-2$

$\log_2\left(2^x-\sqrt{5}\right)\left(2^x+\sqrt{5}\right) = 2x-2$

$2^{2x} - 5 = 2^{2x-2}$

$2^{2x} - 5 = \frac{2^{2x}}{4}$

$4\cdot 2^{2x} - 20 = 2^{2x}$

$2^{2x} = \frac{20}{3}$

$2x = \log_2\frac{20}{3}$

$x = \frac{1}{2}\log_2\frac{20}{3} = \frac{1}{2}\frac{\ln(20/3)}{\ln 2} = 1,368$