



CS de mathématique en 6SM-FM

- Veuillez traiter chaque question sur une double feuille à en-tête du Collège.
- Les nombres à virgule seront exprimés avec trois décimales.

**A. COMBINATOIRE ET BINOME DE NEWTON**

1. Énoncez et démontrez la formule de Pascal.
- 2a. En utilisant les cinq lettres a, b, c, d, e, combien peut-on former de mots de cinq lettres dans lesquels les lettres a et b ne sont pas voisines ?
  - b. Voici les ensembles  $E = \{a, b, c, d, e\}$  et  $F = \{u, v\}$ .  $\#E = 5$  et  $\#F = 2$ .  
Combien y a-t-il de surjections de E sur F ?
  - c. Une classe de trente-cinq élèves comprend vingt filles et quinze garçons. On veut former un comité comprenant une présidente, un secrétaire et trois autres membres.  
Combien y a-t-il de comités possibles ?
- 3a. Énoncez la formule de Newton.
  - b. Déterminez les termes en  $x^8$  et  $x^9$  de  $\left(3x^4 - \frac{2}{x}\right)^7$

**B. COMPLEXES ET FONCTIONS CYCLOMETRIQUES**

1. Énoncez et démontrez, par récurrence, la formule de Moivre.
2. Résolvez dans  $\mathbb{C}$  :  $z^5 + \sqrt{3} + 2i = 0$  (solutions sous la forme  $a + bi$ )
3. Vous basant sur les formules de Moivre et de Newton, calculez  $\cos 3\varphi$  et  $\sin 3\varphi$ .
4. Résolvez :  $\text{Arctg}2x - \text{Arctg}x = \text{Arctg}\frac{1}{3}$ .

**C. LOGARITHME NEPERIEN**

1. Définissez la fonction logarithme népérien et démontrez qu'elle est un morphisme de groupes.
2. Résolvez :  $\ln\sqrt{x^2 + 2} - \frac{1}{2}\ln x = \ln\sqrt{3}$ .
3. Déterminez une équation cartésienne de la tangente à f au point d'abscisse a, sachant que  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  et  $a = e$
4. Calculez  $\int x \ln x dx$  et  $\int \sec x dx$ .

**D. EXPONENTIELLE**

On considère la fonction cosinus hyperbolique définie par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

1. Esquissez le graphe cartésien de **ch** et caractérisez son « look ».
2. Calculez l'aire A de la surface S comprise entre **ch**, l'axe X et les droites verticales d'équations  $x = -2$  et  $x = 2$ .
3. Calculez le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de S autour de l'axe X.
4. Calculez l'aire L de la surface de révolution engendrée par la rotation de  $\text{ch}_{[-2,2]}$  autour de l'axe X.