Exercice n°1

Claculez les limites de $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-5x+6}$ en 2 et en 3.

$\lim\limits_{2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{0}{0}$ au premier essai.

C'est une forme d'indétermination que l'on lève en mettant $(x-2)$ en évidence au numérateur et au dénominateur. En simplifiant la fraction, on obtiendra la prolongée continue de f au point 2. Il suffira de la calculer en 2.

$$\lim_{2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\lim_{2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=-7$$

$$\lim_{3}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-5x+6}=\frac{13}{0}$$

La forme d'indétermination nous indique qu'il s'agit d'une limite infinie.
On détermine son existence éventuelle et son signe en faisant un tableau de signes.

x		3	
x^3-x^2-x-2	+	13	+
x^2-5x+6	−	0	+
f(x)	−	///	+

On en tire que $\lim\limits_{3}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-5x+6}$ n'existe pas car $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f=+\infty$.

Exercice n°2

Calculez la limite de $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt{2x}-\sqrt{6x-8}}$ en 2 et en + l'infini.

$\lim\limits_{2} f=\dfrac{0}{0}$.

L'indétermination obtenue nous indique qu'il faut utiliser la méthode des binômes et trinômes conjugués, c'est-à-dire les produits remarquables $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ afin de parvenir à simplifier les numérateur et dénominateur par $x-2$.

Calculons :

$$\lim_{2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt{2x}-\sqrt{6x-8}}$$

$$=\lim_{2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{5x-2}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)+\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^2\right]\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6x-8}\right)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{6x-8}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6x-8}\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)+\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{2}\frac{\left((3x+2)-(5x-2)\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6x-8}\right)}{\left(2x-(6x-8)\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)+\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^2\right]}$$

$$=\lim_{2}\frac{-2\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x}+\sqrt{6x-8}\right)}{-4\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)+\left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^2\right]}=\frac{2(2+2)}{4(4+4+4)}=\frac{1}{6}$$

$\lim\limits_{+\infty} f$ ne fonctionne pas au premier essai.

Il faut donc mettre la plus grande puissance de x en évidence au numérateur et au dénominateur.

Allons-y :

$$\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt{2x}-\sqrt{6x-8}}=\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{x}}-\sqrt[3]{5-\dfrac{2}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6-\dfrac{8}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{+\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\cdot\lim_{+\infty}\frac{\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{x}}-\sqrt[3]{5-\dfrac{2}{x}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-\dfrac{8}{x}}}=0\cdot\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=0$$

Exercice n°3

Calculer la limite de $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+3x+3}-\sqrt{3x^2-3x-3}}{\sqrt{5x^2+5x+5}-\sqrt{5x^2-5x-5}}$ en $-\infty$

étape 1 : faire un premier essai.

Cela donne l'indétermination $\dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$.

étape 2 : mettre la plus grande puissance de x en évidence.

$$\lim_{-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+3x+3}-\sqrt{3x^2-3x-3}}{\sqrt{5x^2+5x+5}-\sqrt{5x^2-5x-5}}=\lim_{-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{3+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3-\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}{-x\left(\sqrt{5+\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}}-\sqrt{5-\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{0}{0}.$$

Ce qui est encore indéterminé.

étape3 : utiliser la méthode du binôme conjugué …

$$\lim_{-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+3x+3}-\sqrt{3x^2-3x-3}}{\sqrt{5x^2+5x+5}-\sqrt{5x^2-5x-5}}=\lim_{-\infty}\frac{(6x+6)\left(\sqrt{5x^2+5x+5}+\sqrt{5x^2-5x-5}\right)}{(10x+10)\left(\sqrt{3x^2+3x+3}+\sqrt{3x^2-3x-3}\right)}$$

$$=\lim_{-\infty}\frac{x\left(6+\frac{6}{x}\right)(-x)\left(\sqrt{5+\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}}\right)}{x\left(10+\frac{10}{x}\right)(-x)\left(\sqrt{3+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{3-\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{6\cdot 2\sqrt{5}}{10\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cong 0,775$$

<u>Exercice n°4</u>

Calculez la limite de $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^2+8}-\sqrt[3]{6x^3+8x}}{\sqrt[3]{2x^3-8}-\sqrt{3x^2-8}}$ au point 2.

Un premier essai donne $\dfrac{0}{0}$. On pensera donc à appliquer la méthode des polynômes conjugués.

Les racines carrées et cubiques nous invitent à utiliser la formule : $a^6-b^6=(a-b)\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)$

Au boulot !

$$\lim_{2}\frac{\sqrt{2x^2+8}-\sqrt[3]{6x^3+8x}}{\sqrt[3]{2x^3-8}-\sqrt{3x^2-8}}=\lim_{2}\frac{\left[\left(2x^2+8\right)^3-\left(6x^3+8x\right)^2\right]\cdot A}{\left[\left(2x^3-8\right)^2-\left(3x^2-8\right)^3\right]\cdot B}=\ldots$$

où $A=\left(\sqrt[3]{2x^3-8}\right)^5+\left(\sqrt[3]{2x^3-8}\right)^4\left(\sqrt{3x^2-8}\right)+\left(\sqrt[3]{2x^3-8}\right)^3\left(\sqrt{3x^2-8}\right)^2+\left(\sqrt[3]{2x^3-8}\right)^2\left(\sqrt{3x^2-8}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2x^3-8}\right)\left(\sqrt{3x^2-8}\right)^4+\left(\sqrt{3x^2-8}\right)^5$

et $B=\left(\sqrt{2x^2+8}\right)^5+\left(\sqrt{2x^2+8}\right)^4\left(\sqrt[3]{6x^3+8x}\right)+\left(\sqrt{2x^2+8}\right)^3\left(\sqrt[3]{6x^3+8x}\right)^2+\left(\sqrt{2x^2+8}\right)^2\left(\sqrt[3]{6x^3+8x}\right)^3+\left(\sqrt{2x^2+8}\right)\left(\sqrt[3]{6x^3+8x}\right)^4+\left(\sqrt[3]{6x^3+8x}\right)^5$

$$\ldots=\lim_{2}\frac{\left(-28x^6+320x^2+512\right)\cdot A}{\left(-23x^6+216x^4-32x^3-576x^2+576\right)\cdot B}=\lim_{2}\frac{-\cancel{(x-2)}\left(28x^5+56x^4+112x^3+224x^2+128x+256\right)\cdot A}{-\cancel{(x-2)}\left(23x^5+46x^4-124x^3-216x^2+144x+288\right)\cdot B}=\frac{4096\cdot 6\cdot 2^5}{192\cdot 6\cdot 4^5}=\frac{2}{3}.$$

Et voilà le travail.

La limite en $+\infty$ de la même fonction exige un peu moins de calcul.

Après un premier essai infructueux, on met la plus grande puissance de x en évidence au numérateur et au dénominateur ce qui donne :

$$\lim_{+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+8}-\sqrt[3]{6x^3+8x}}{\sqrt[3]{2x^3-8}-\sqrt{3x^2-8}}=\lim_{+\infty}\frac{x\left(\sqrt{2+\dfrac{8}{x^2}}-\sqrt[3]{6+\dfrac{8}{x^2}}\right)}{x\left(\sqrt[3]{2-\dfrac{8}{x^3}}-\sqrt{3-\dfrac{8}{x^2}}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}\cong 0,853$$