I. LOGARITHMES

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\leq 0$

Pour étudier le signe d'une fraction, on fait un tableau de signes.
Les valeur intéressantes de lnx apparaissent immédiatement : -1 et 1.
On commence donc par étudier le signe de la fraction proposée en fonction des valeurs de lnx

lnx		-1		1	
N	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D	$-$	$-$	$-$	0	$+$
N/D	$+$	0	$-$	///	$+$

Ainsi, $\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}\leq 0$ ssi $-1\leq \ln x<1$ ssi $e^{-1}\leq x<e$ ssi $\dfrac{1}{e}\leq x<e$. Donc $S=\left[\dfrac{1}{e},e\right[$.

2. Dérivez : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Déterminez une équation de la tangente T au graphe de $f(x)=\ln 3x$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

La tangente T passe par le point p d'abscisse $\dfrac{1}{3}$, c'est-à-dire le point $\left(\dfrac{1}{3},f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

La pente de T égale $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$ car $f'(x)=\dfrac{1}{3x}3=\dfrac{1}{x}$.

Dès lors, $T\equiv y=3x+k$. (T est de pente 3) avec $0=3\dfrac{1}{3}+k$ (T comprend p) càd $k=-1$

Ainsi $T\equiv y=3x-1$.

4. Calculez : $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

On calcule $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$ en posant $u=\ln x$, $dv=x^2dx$ et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int udv=uv-\int vdu$. Ensuite on applique le théorème fondamental de l'Analyse.

Dès lors, $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right]_1^2=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}-\frac{1}{3}\ln 1+\frac{1}{9}=1{,}07$

II. EXPONENTIELLES

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$: $2e^{2x} - 5e^{x} - 3 = 0$

L'équation proposée est du second degré en l'inconnue e^{x}.

Elle est vérifiée pour $e^{x} = -\frac{1}{2}$ ou $e^{x} = 3$ (on applique la formule $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)

Mais $e^{x} = -\frac{1}{2}$ est à rejeter car $e^{x} = \exp x$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$

Donc $e^{x} = 3$ et $x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

2. Dérivez : $f(x) = e^{x} \text{Arctg}x$

On applique simplement la formule de la dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi : $f'(x) = e^{x} \text{Arctg}x + \frac{e^{x}}{1+x^2}$

3. Déterminez une équation de la tangente T au graphe de $f(x) = e^{3X} + e^{2x} - e^{x} + 1$ au point d'abscisse 1.
(réponse sous la forme y = ax + b, a et b étant des nombres décimaux avec 2 chiffres après la virgule)

On applique la même méthode qu'en I.3.

$f(1) = e^3 + e^2 - e + 1 \cong 25,76$

$f'(x) = 3e^{3X} + 2e^{2x} - e^{x}$

$f'(1) = 3e^3 + 2e^2 - e \cong 72,32$

Finalement : $T \equiv y = 72,32x - 46,56$

4. Calculez : $\int x^2 e^{x} dx$.

Par parties : on pose $u = x^2$ et $dv = e^{x}dx$ et on déduit : $du = 2xdx$ et $v = e^{x}$

D'où $\int x^2 e^{x} dx = x^2 e^{x} - \int 2xe^{x} dx = x^2 e^{x} - 2\int xe^{x} dx$.

Encore une fois par parties : on pose $u = x$ et $dv = e^{x}dx$.

D'où $\int x^2 e^{x} dx = x^2 e^{x} - 2\left(xe^{x} - e^{x}\right) = e^{x}\left(x^2 - 2x + 2\right) + k$

REPONSES :

I. LOGARITHMES	II. EXPONENTIELLES
1. $S=\left[\frac{1}{e},e\right[$	1. $S=\{\ln 3\}$
2. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	2. $f'(x)=e^x \text{Arctg}x+\frac{e^x}{1+x^2}$
3. $T\equiv y = 3x-1$	3. $T\equiv y\cong 72,32x-46,56$
4. $\int_1^2 x^2 \ln x dx \cong 1,07$	4. $\int x^2e^x dx = e^x\left(x^2-2x+2\right)+k$