

I. LOGARITHMES

1. Résolvez dans \mathbb{R} : $\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \leq 0$

Pour étudier le signe d'une fraction, on fait un tableau de signes.

Les valeurs intéressantes de $\ln x$ apparaissent immédiatement : -1 et 1 .

On commence donc par étudier le signe de la fraction proposée en fonction des valeurs de $\ln x$

$\ln x$		-1		1	
N	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D	$-$	$-$	$-$	0	$+$
N/D	$+$	0	$-$	$///$	$+$

Ainsi, $\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} \leq 0$ ssi $-1 \leq \ln x < 1$ ssi $e^{-1} \leq x < e$ ssi $\frac{1}{e} \leq x < e$. Donc $S = \left[\frac{1}{e}, e \right[$.

2. Dériver : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Déterminez une équation de la tangente T au graphe de $f(x) = \ln 3x$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

La tangente T passe par le point p d'abscisse $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire le point $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right) \right) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$.

La pente de T égale $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ car $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$.

Dès lors, $T \equiv y = 3x + k$. (T est de pente 3) avec $0 = 3 \cdot \frac{1}{3} + k$ (T comprend p) càd $k = -1$

Ainsi $T \equiv y = 3x - 1$.

4. Calculez : $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

On calcule $\int x^2 \ln x dx$ en posant $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$ et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$\int u dv = uv - \int v du$. Ensuite on applique le théorème fondamental de l'Analyse.

Dès lors, $\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{9} = 1,07$

II. EXPONENTIELLES

1. Résolvez dans \mathbb{R} : $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$

L'équation proposée est du second degré en l'inconnue e^x .

Elle est vérifiée pour $e^x = -\frac{1}{2}$ ou $e^x = 3$ (on applique la formule $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)

Mais $e^x = -\frac{1}{2}$ est à rejeter car $e^x = \exp x$ et $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

Donc $e^x = 3$ et $x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

2. Dérivez : $f(x) = e^x \operatorname{Arctg} x$

On applique simplement la formule de la dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi : $f'(x) = e^x \operatorname{Arctg} x + \frac{e^x}{1+x^2}$

3. Déterminez une équation de la tangente T au graphe de $f(x) = e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1$ au point d'abscisse 1.
(réponse sous la forme $y = ax + b$, a et b étant des nombres décimaux avec 2 chiffres après la virgule)

On applique la même méthode qu'en I.3.

$$f(1) = e^3 + e^2 - e + 1 \cong 25,76$$

$$f'(x) = 3e^{3x} + 2e^{2x} - e^x$$

$$f'(1) = 3e^3 + 2e^2 - e \cong 72,32$$

$$\text{Finalement : } T \equiv y = 72,32x - 46,56$$

4. Calculez : $\int x^2 e^x dx$.

Par parties : on pose $u = x^2$ et $dv = e^x dx$ et on déduit : $du = 2x dx$ et $v = e^x$

$$\text{D'où } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Encore une fois par parties : on pose $u = x$ et $dv = e^x dx$.

$$\text{D'où } \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

REPOSES :

I. LOGARITHMES	II. EXPONENTIELLES
1. $S = \left[\frac{1}{e}, e \right[$	1. $S = \{\ln 3\}$
2. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	2. $f'(x) = e^x \operatorname{Arctg}x + \frac{e^x}{1+x^2}$
3. $T \equiv y = 3x - 1$	3. $T \equiv y = 72,32x - 46,56$
4. $\int_1^2 x^2 \ln x dx = 1,07$	4. $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + k$