Calculez :

1). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+8x}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$

2). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$

3). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$

4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

---

1). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+8x}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}=\dfrac{0}{0}$ (forme d'indétermination).

Il faut mettre $x-2$ en évidence au numérateur et au dénominateur.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+8x}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)(x^3+3x^2+3x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4x)}{(x^3+3x^2+3x+1)}=-\frac{4}{27}.$$

---

2). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{0}{0}$ (ind.)

On multiplie N et D par les binôme et trinôme conjugués :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}=\lim_{x\to0}\frac{-x\left(1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{-x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}{1+\sqrt{1+x}}=\frac{3}{2}$$

---

3). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x^2+3x-2}\right)=\infty-\infty$ (ind.)

On met la plus grande puissance de x en évidence et cela donne : $+\infty(2-2)=+\infty\cdot0$ (ind.)

On utilise dès lors le binôme conjugué :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x^2+3x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-6x+4)}{\sqrt{4x^2-3x+2}+\sqrt{4x^2+3x-2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(6-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6-\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{6}{2+2}=\frac{3}{2}$$

---

4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{0}{0}$ (ind.)

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{(1-\cos x)}{x^2\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin^2x}{x^2}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$$
