---

1. Enoncez les propriétés de la fonction logarithme dont la base est le nombre réel a.

2. Calculez $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\,tg^2x\,dx$.

3. Résolvez : $\log_3\sqrt{729}\cdot\log_9\sqrt[3]{2x-7}=\frac{9}{2}\log_{27}(x-2)-\log_3 2$

4. Calculez : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

---

1. $\forall a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{1\}$: $\log_a$ est un isomorphisme continu, dérivable et strictement monotone du groupe $(\mathbb{R}_0^+,\bullet)$ dans le groupe $(\mathbb{R},+)$.
Si $0 < a < 1$ alors $\log_a$ est strictement décroissante.
Si $a > 1$ alors $\log_a$ est strictement croissante.
$\forall r\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}_0^+ : \log_a x^r = r\log_a x$.
$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ et $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$.

2. Observons d'abord que $\int tg^2x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=tgx-x+k$
et calculons ensuite $\int x\,tg^2x\,dx$ par parties c-à-d en appliquant la formule $\int udv=uv-\int vdu$.
On pose u = x et $dv=tg^2x\,dx$. On déduit : du = dx et v = tgx – x. D'où :
$\int x\,tg^2x\,dx=x(tgx-x)-\int(tgx-x)dx=xtgx-x^2+\ln\cos x+\frac{x^2}{2}(+k)=xtgx+\ln\cos x-\frac{x^2}{2}(+k)$
Finalement : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x\,tg^2x\,dx=\left[xtgx+\ln\cos x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cong 0,442$

3. (1) = $\log_3\sqrt{729}\cdot\log_9\sqrt[3]{2x-7}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\log_9(2x-7)=\frac{\log_{27}(2x-7)}{\log_{27}9}=\log_{27}\sqrt{(2x-7)^3}$
(2) = $\frac{9}{2}\log_{27}(x-2)-\log_3 2=\log_{27}\sqrt{(x-2)^9}-\log_{27}8=\log_{27}\frac{\sqrt{(x-2)^9}}{8}$
(1) = (2) ssi $\sqrt{(2x-7)^3}=\frac{\sqrt{(x-2)^9}}{8}$ ssi $64(2x-7)^3=(x-2)^9$ ssi $4(2x-7)=(x-2)^3$
ssi $x^3-6x^2+4x+20=0$ ssi $x\cong-1,396$.
Cette solution est à rejeter vu les conditions d'existence : $2x-7>0$ et $x-2>0$.
L'équation proposée n'a donc pas de solution. $S=\varnothing$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x+1\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x+1}}{1-\frac{2}{x+1}}=\frac{e^{-2}}{1}=\frac{1}{e^2}$.

Annexe à la question n°3

Les éventuelles solutions de $x^3 - 6x^2 + 4x + 20 = 0$ ne sautent pas aux yeux.
Essayons de les situer en analysant le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x + 20$.
On connaît l'allure générale de f, qui est une cubique.
Sa dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$ s'annulle pour x = 0,36 ou x = 3,63.
f admet donc un maximum en 0,36 et un minimum en 3,63.
Or f(0,36) = 20,71 et f(3,63) = 3,29.
Donc le graphe de f ne coupe l'axe des x qu'en un seul point situé à gauche de 0,36.
Cette racine étant inférieure 0,36, elle ne convient pas comme solution de l'exercice n°3.