
Résolvez l'équation $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ dans $\mathbb{R}$
et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

Il s'agit d'une équation symétrique en sinx et cosx.

Remplaçons donc x par $y + \frac{\pi}{4}$ et calculons successivement :

$$\sin^3\left(y + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^3\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\left(\sin y \cos\frac{\pi}{4} + \cos y \sin\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\cos y \cos\frac{\pi}{4} - \sin y \sin\frac{\pi}{4}\right)^3 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \left((\sin y + \cos y)^3 + (\cos y - \sin y)^3\right) = 1$$

$$\sin^3 y + 3\sin^2 y \cos y + 3\sin y \cos^2 y + \cos^3 y + \cos^3 y - 3\cos^2 y \sin y + 3\cos y \sin^2 y - \sin^3 y = 2\sqrt{2}$$

$$2\cos^3 y + 6\sin^2 y \cos y = 2\sqrt{2}$$

$$2\cos^3 y + 6\left(1 - \cos^2 y\right)\cos y = 2\sqrt{2}$$

$$2\cos^3 y + 6\cos y - 6\cos^3 y = 2\sqrt{2}$$

$$4\cos^3 y - 6\cos y + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\cos^3 y - \frac{3}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Visiblement $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vérifie cette dernière équation.

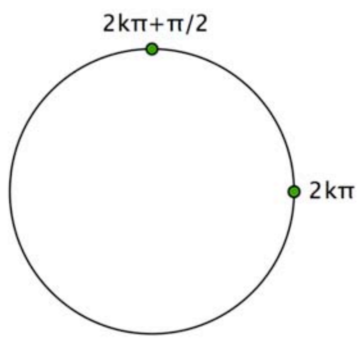
Elle se factorise donc en : $\left(\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos^2 y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - 1\right) = 0$

ou encore en : $\left(\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos y + \sqrt{2}\right) = 0$.

Elle est donc vérifiée pour $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos y = -\sqrt{2}$ (à rejeter).

Ainsi : $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$;

$$\boxed{x = 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$



Résolvez l'équation $2\cos^4 x + \sin x \cos^3 x - \sin^2 x \cos^2 x = 0$ dans $\mathbb{R}$
et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

L'équation proposée est homogène de degré 4 en sinx et cosx.

Calculons :

$2\cos^4 x + \sin x \cos^3 x - \sin^2 x \cos^2 x = 0$

ssi $\cos^2 x\left(2\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x\right) = 0$

ssi

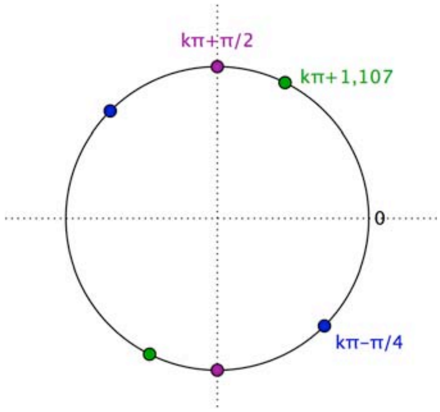
$\cos^2 x = 0$ ou $2\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$

ssi $\cos x = 0$ ou $2 + \mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x = 0$

ssi $\cos x = 0$ ou $\mathrm{tg}x = -1$ ou $\mathrm{tg}x = 2$

ssi

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = k\pi + 1{,}107}$$



Résolvez l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$ dans $\mathbb{R}$
et représentez ses solutions sur le cercle trigonométrique.

On pose $\varphi = \frac{\pi}{3}$ et l'équation devient :

$\cos x + \mathrm{tg}\varphi \sin x = 1$

$\cos x \cos\varphi + \sin x \sin\varphi = \cos\varphi$

$\cos(x - \varphi) = \frac{1}{2}$

$x - \varphi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{x = 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}}$$