25. Déterminez l'intersection de la sphère $S \equiv x^2+y^2+z^2-2z-8=0$ avec le plan ξ d'équation $5x+3y+6z-2=0$

Le plan ξ coupe ou touche la sphère S ssi la distance du centre de S à ξ est inférieure au rayon de S. Commençons donc par chercher ces différents éléments.

1°) Centre et rayon de S

L'équation de S se transforme facilement en $x^2+y^2+(z-1)^2=9$ ce qui permet de voir instantanément que le centre de S est le point $c=(0,0,1)$ et que son rayon est R = 3.

2°) La perpendiculaire P à ξ par le point c.

P comprend le point $(0,0,1)$ et a pour vecteur directeur le vecteur normal de ξ, à savoir $(5,3,6)$.

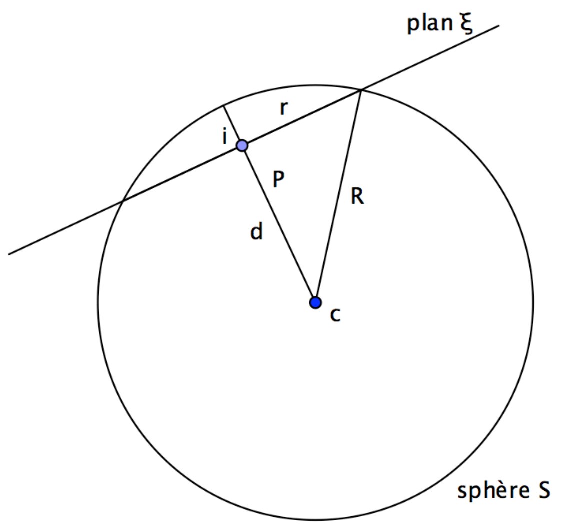
$$\vdash P \equiv \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda+1 \end{cases}$$

3°) Le point de percée i de P dans ξ.

On résout $\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda+1 \\ x^2+y^2+z^2-2z-8=0 \end{cases}$ et on trouve $i=\left(-\dfrac{10}{35},-\dfrac{6}{35},\dfrac{23}{35}\right)$.

4°) La distance d de c à ξ = $d(c,i)=\sqrt{\left(\dfrac{10}{35}\right)^2+\left(\dfrac{6}{35}\right)^2+\left(\dfrac{2}{35}\right)^2}=\dfrac{2}{\sqrt{35}}\cong 0{,}338$

Comme d < R, le plan ξ coupe S suivant un cercle que nous nommerons Γ.



5°) Le centre de Γ est le point i et le rayon de Γ = $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{311}{35}}\cong 2{,}98$

Voici quelques images de la situation en perspective.