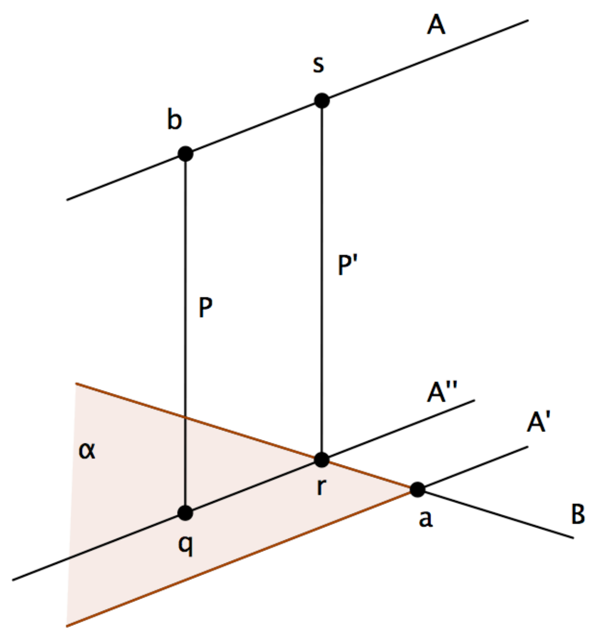
29. Déterminez la distance des deux droites A et B :

$$A \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \quad ; \quad B \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

Cette distance est la longueur de la perpendiculaire commune à A et B.
(en réalité, la longueur du segment de la perpendiculaire commune, limité aux droites A et B).

Voici un schéma de la situation



Perpendiculaire commune à deux droites gauches

et une méthode de résolution :

1°) Par un point a de B, une droite A' parallèle à A.
Cette parallèle A' forme avec B le plan α.
2°) Par un point b de A, une droite P perpendiculaire au plan α.
3°) Le point de percée q de P dans α.
4°) Par le point q, une droite A'' parallèle à A'.
5°) Le point d'intersection r de A'' et B.
6°) Par le point r, une droite P' parallèle à P.
7°) Le point d'intersection s de P' et A.
8°) La distance de A à B = la distance de r à s.

Et maintenant les calculs :

1°) Le point a de B est tout trouvé : $(3,1,4)$ (voir équation de B).

$$A' \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 3 \\ y = \lambda + 1 \\ z = -2\lambda + 4 \end{cases}$$

2°) Le point b de A est tout aussi visible : $(2,-1,5)$

L'expression de α, par contre demande quelques calculs.

α est défini par le point a et les vecteurs directeurs de A' et B.

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad \alpha \equiv 4x - 2y + 5z - 30 = 0 .$$

La droite P perpendiculaire à α et passant par b admet pour équation :

$$P \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + 2 \\ y = -2\lambda - 1 \\ z = 5\lambda + 5 \end{cases}$$

3°) Le point de percée q de P dans α est solution de :

$$\begin{cases} x = 4\lambda + 2 \\ y = -2\lambda - 1 \\ z = 5\lambda + 5 \\ 4x - 2y + 5z - 30 = 0 \end{cases} \quad \text{c-à-d} \quad q = \left(\frac{14}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{40}{9} \right).$$

4°) Par q une parallèle A'' à A'

$$A'' \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + \dfrac{14}{9} \\ y = \lambda - \dfrac{7}{9} \\ z = -2\lambda + \dfrac{40}{9} \end{cases}$$

5°) Le point r de l'intersection de A'' et B.

$$\text{On résout} \begin{cases} x = 3\lambda + \dfrac{14}{9} = -2\mu + 3 \\ y = \lambda - \dfrac{7}{9} = \mu + 1 \\ z = -2\lambda + \dfrac{40}{9} = 2\mu + 4 \end{cases} \quad \text{et on trouve } r = \left(\frac{41}{9}, \frac{2}{9}, \frac{22}{9} \right).$$

6°) Par r une parallèle P’ à P.

$$P' \equiv \begin{cases} x = 4\lambda + \dfrac{41}{9} \\ y = -2\lambda + \dfrac{2}{9} \\ z = 5\lambda + \dfrac{22}{9} \end{cases}$$

7°) Le point s de l’intersection de P’ et A est solution de

$$\begin{cases} x = 4\lambda + \dfrac{41}{9} = 3\mu + 2 \\ y = -2\lambda + \dfrac{2}{9} = \mu - 1 \\ z = 5\lambda + \dfrac{22}{9} = -2\mu + 5 \end{cases} \quad \text{à savoir } s = (5,0,3).$$

8°) d(A,B) = d(r,s) = $\sqrt{\left(\dfrac{4}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{9}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{9}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{45}{81}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0,745$.

Vous apprendrez peut-être un jour que cette distance se calcule d’un seul coup sec par la formule :

$$d(A,B) = \frac{\left| \text{dét} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|}{\| v \Lambda w \|}$$

où
u est le vecteur directeur de la droite reliant un point de A à un point de B
v et w sont les vecteurs directeurs de A et B
$v\Lambda w$ est le produit vectoriel des vecteurs v et w.

Dans le cas de notre exercice :

$$d(A,B) = \frac{\left| \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right|}{\| (4,2,5) \|} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,745 .$$