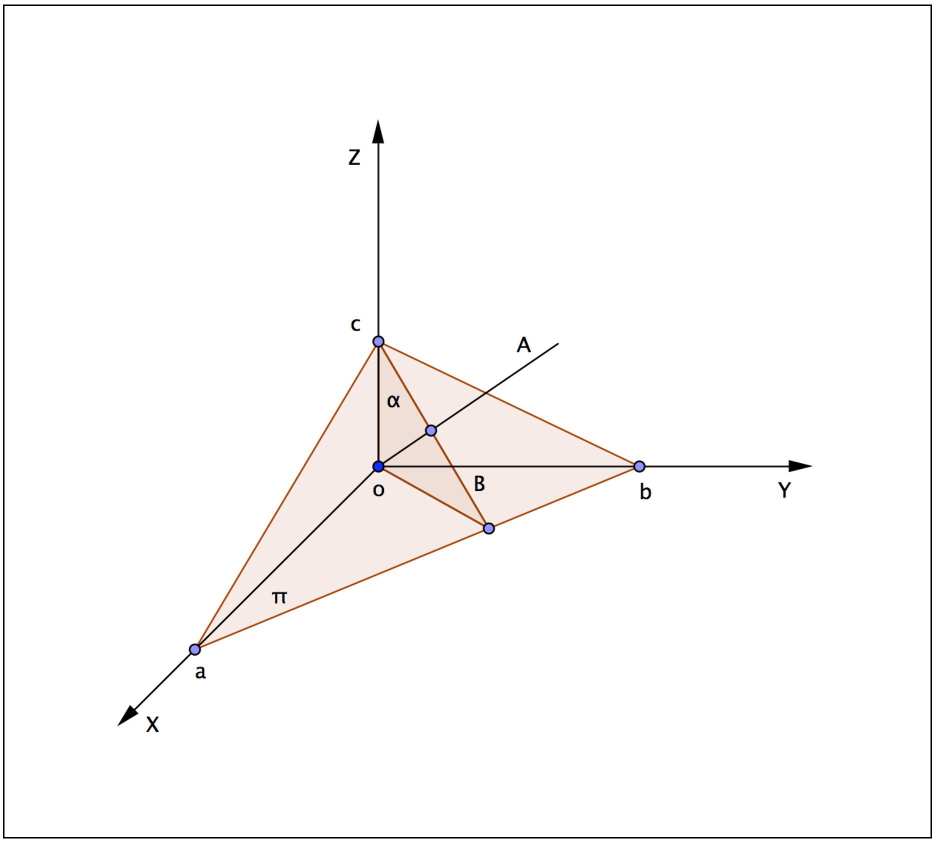
30. Les points $a = (3,0,0)$, $b = (0,2,0)$ et $c = (0,0,1)$ étant donnés, déterminez :

a. Une équation cartésienne du plan π des points a, b et c.
b. Un système d'équations paramétriques de la droite A qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à π.
c. Un système d'équations paramétriques de la droite B passant par le point c, incluse au plan π et perpendiculaire à la droite ab.
d. Le point d'intersection des droites A et B, s'il existe.

Un schéma avant d'entamer les calculs :



Et voici les calculs :

a) $\pi \equiv 2x + 3y + 6z - 6 = 0$ (ça se voit à l'oeil nu).

b) Le vecteur directeur de A = le vecteur normal de π = (2,3,6) car $A \perp \pi$
et A comprend le point (0,0,0).

$$\text{Donc } A \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$$

c) Comme B comprend c, est incluse à π et perpendiculaire à ab,
B est l'intersection du plan π avec le plan α comprenant c et perpendiculaire à ab.

$\alpha \perp ab$
$\vdash$ le vecteur normal de α = le vecteur directeur de ab = $(3,-2,0)$
$\vdash \alpha \equiv 3x - 2y + \ldots = 0$

α comprend c

$\vdash \alpha \equiv 3x - 2y = 0$

B est l'intersection de π et α

$\vdash B \equiv \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Mais on demande des équations paramétriques de B.On les détermine facilement dès qu'on dispose d'un point de B, par exemple (0,0,1) qui est donné et d'un vecteur directeur de B c-à-d un point de B_0, par exemple $(12,18,-13)$ (à calculer).

D'où $B \equiv \begin{cases} x = 12\lambda \\ y = 18\lambda \\ z = -13\lambda + 1 \end{cases}$.

d) Le point d'intersection de A et B s'obtient en résolvant

$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$, ce qui donne le point $\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$