31. On donne le point $p = (3,0,7)$ et le plan $\xi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$.
Déterminez :

---

a. Un système d'équations paramétriques de la droite A passant par le point p et de vecteur directeur (3,2,1).
b. La coordonnée du point de percée i de la droite A dans le plan ξ.
c. Un système d'équations cartésiennes (sous la forme I♥) de la projection orthogonale B de la droite A sur le plan ξ.
d. Une équation cartésienne du plan ψ comprenant le point p et perpendiculaire à la droite A.
e. Un système d'équations cartésiennes (I♥) de la droite C, intersection de ξ et ψ.

---

a). $A \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 3 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda + 7 \end{cases}$

b). On résout le système $\begin{cases} x = 3\lambda + 3 \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda + 7 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

Cela nous donne $\lambda = -\frac{1}{7}$; $x = \frac{18}{7}$; $y = -\frac{2}{7}$; $z = \frac{48}{7}$. D'où $\xi \cap A = \{i\} = \left\{\left(\frac{18}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{48}{7}\right)\right\}$.

c). Une méthode de résolution :
1°) Par le point p de A une droite D perpendiculaire au plan ξ.
Cette droite D passe par p
et a pour vecteur directeur le vecteur normal de ξ à savoir (2,1, –1).

$\vdash D \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda + 7 \end{cases}$

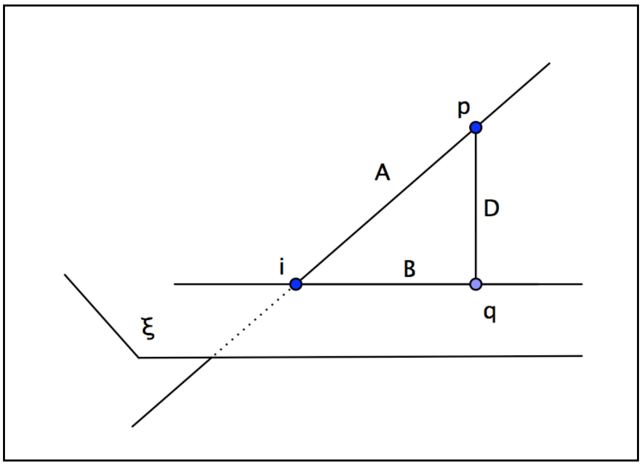
2°) Le point q de percée de D dans ξ.

On résout $\begin{cases} x = 2\lambda + 3 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda + 7 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ et on trouve $q = \left(\frac{16}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{43}{6}\right)$.

3°) La projection de la droite A sur le plan ξ est la droite B = qi.
Elle a pour équation cartésienne $\frac{x - i_1}{q_1 - i_1} = \frac{y - i_2}{q_2 - i_2} = \frac{z - i_3}{q_3 - i_3}$, ce qui donne après calcul :

$$B \equiv \frac{x - \frac{16}{6}}{\frac{-4}{42}} = \frac{y + \frac{1}{6}}{\frac{-5}{42}} = \frac{z - \frac{43}{6}}{\frac{-13}{42}} \text{ ou plus simplement } B \equiv \frac{x - \frac{16}{6}}{4} = \frac{y + \frac{1}{6}}{5} = \frac{z - \frac{43}{6}}{13}$$

(voyez un schéma à la page suivante).



d) Le plan ψ étant perpendiculaire à la droite A, son vecteur normal est le vecteur directeur de A. Dès lors, $\psi \equiv 3x + 2y + z + \ldots = 0$.
On complète cette équation en utilisant l'information $p \in \psi$.
Finalement : $\psi \equiv 3x + 2y + z - 16 = 0$

e) Pour établir l'équation demandée de $C = \xi \cap \psi$, il suffit de connaître un point de C et un vecteur directeur de C c'est-à-dire, un point de $C_0 = \xi_0 \cap \psi_0$.
En posant $z = 0$, on trouve le point $(-20, 38, 0) \in \xi \cap \psi$
et en posant z = 1, on trouve $(3, -5, 1) \in \xi_0 \cap \psi_0$.
L'équation demandée : $C \equiv \dfrac{x+20}{3} = \dfrac{y-38}{-5} = \dfrac{z}{1}$.