Dans un repère orthonormé d'axes X et Y, on donne deux points fixes a et b de X situés d'un même côté de l'origine, ainsi qu'un point variable c de Y. Rechercher et analyser le lieu du point de l'intersection de bc avec la perpendiculaire à ac issue de a.

Soient $(a,0)$ et $(b,0)$, avec $0 < a < b$, les coordonnées respectives des points a et b

et $(\lambda,0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ celle de c.

On calcule immédiatement :

$$bc \equiv \lambda x + by - \lambda b = 0 \quad \text{et} \quad ac \equiv \lambda x + ay - \lambda a = 0$$

La perpendiculaire P à ac par a : $P \equiv -ax + \lambda y + a^2 = 0$.

Les génératrices du lieu L recherché sont $G_1 = bc$ et $G_2 = P$.

Il suffit d'éliminer le paramètre λ du système de ces génératrices

$$\begin{cases} G_1 \equiv \lambda x + by - \lambda b = 0 \\ G_2 \equiv -ax + \lambda y + a^2 = 0 \end{cases} \quad \text{pour obtenir l'équation du lieu L.}$$

Ainsi $L \equiv ax^2 + by^2 - a(a+b)x + a^2 b = 0$

Analyse du lieu :

L est une ellipse car le C^{33} de sa matrice, à savoir ab, est strictement positif.

Comme l'équation de L n'a pas de terme en xy, les axes de symétrie de L sont parallèles aux axes du repère.

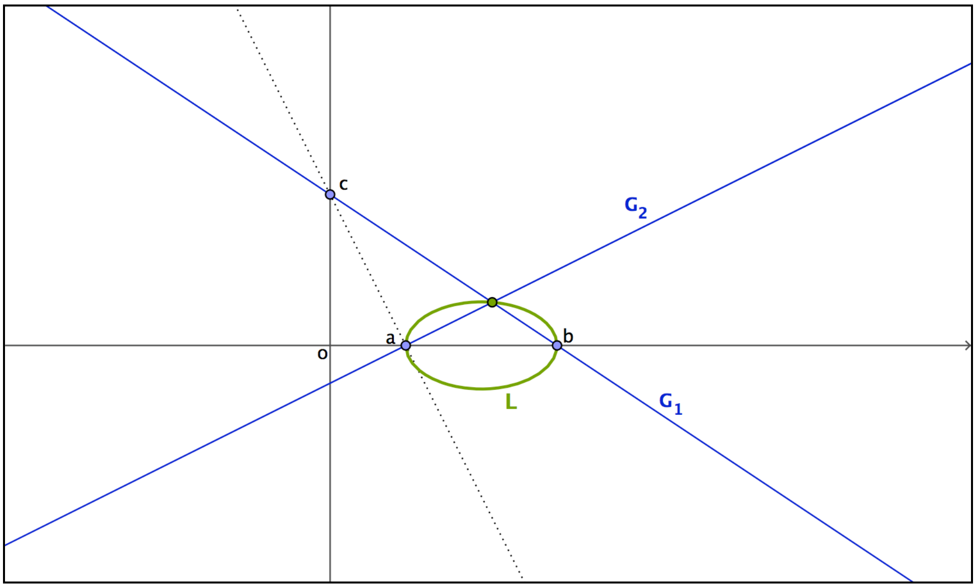
Le centre de L est le milieu de [ab] et par conséquent, les axes de symétrie de L sont les droites

$$X \equiv y = 0 \quad \text{et} \quad S \equiv x = \frac{a+b}{2}.$$

Les couples $(a,0)$ et $(b,0)$ vérifient l'équation de L. Les points a et b sont donc des sommets de L.

Les deux autres sommets sont sur la droite S, leurs coordonnées sont :

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \text{ et } \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$



On peut encore calculer : la longueur du grand axe = $b-a$, celle du petit axe = $(b-a)\sqrt{\frac{a}{b}}$,

la distance centre-foyer = $\frac{b-a}{2}\sqrt{1-\frac{a}{b}}$, l'excentricité de L = $\sqrt{1-\frac{a}{b}}$, les foyers …