Rechercher et analyser le lieu des points tels que la valeur absolue de la différence des carrés de leurs distances à deux droites fixes est constante.

Appelons A et B les deux droites fixes, k le réel constant et L le lieu recherché.

Choix du repère orthonormé :
L'axe X = la droite A, $A \equiv y = 0$
L'origine du repère = le point de $A \cap B$.
$B \equiv y = px$ où p est un réel non nul fixé.

Calculs :

$$(x,y) \in L \Leftrightarrow \left| \frac{(px-y)^2}{p^2+1} - y^2 \right| = k \Leftrightarrow \left| p^2x^2 + y^2 - 2pxy - \left(p^2+1\right)y^2 \right| = k\left(p^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow p^2x^2 - p^2y^2 - 2pxy = \pm k\left(p^2+1\right)$$

Ainsi, L est la réunion de deux courbes :

$$L_1 \equiv p^2x^2 - p^2y^2 - 2pxy - k\left(p^2+1\right) = 0 \text{ et } L_2 \equiv p^2x^2 - p^2y^2 - 2pxy + k\left(p^2+1\right) = 0$$

Analyse du lieu :

- L_1 et L_2 sont des hyperboles

en effet, leurs matrices fournissent $L^{33} = -p^4 - p^2 < 0$.

- Elles ont pour centre le point de l'intersection des droites A et B.

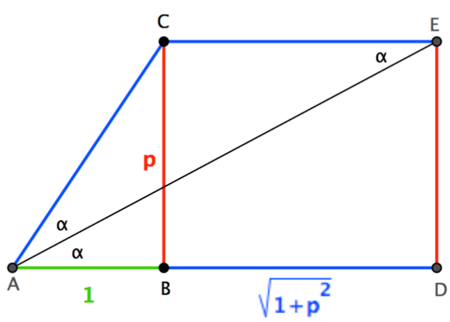
car l'intersection des deux premières lignes de leurs matrice donne le point $(0,0)$.

- Elles ont des asymptotes communes
  puisque les asymptotes d'une hyperbole sont les polaires de leurs points à l'infini et que ces deux hyperboles ont les mêmes points à l'infini que l'on calcule en résolvant le système d'équations :

  $\begin{cases} z = 0 \\ p^2x^2 - p^2y^2 - 2pxy = 0 \end{cases}$. Les points à l'infini sont : $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{1+p^2} \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{1+p^2} \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Leurs vecteurs directeurs sont donc $\left(1+\sqrt{1+p^2},\, p\right)$ et $\left(1-\sqrt{1+p^2},\, p\right)$.

- Ces asymptotes sont perpendiculaires car le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs égale 0.
  Les hyperboles sont donc équilatères.
- On vérifie facilement que les asymptotes sont les bissectrices de la paire de droites $\{A,B\}$ grâce à l'observation suivante :



$$\alpha = \text{Arctg}\,\frac{p}{1+\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2}\,\text{Arctg}\,p$$

Dans le cas où k = 1 et p = 2.

La droite A a pour équation y = 0.
La droite B a pour équation y = 2x.
Le lieu recherché est la réunion des hyperboles

$$L_1 \equiv 4x^2 - 4y^2 - 4xy - 5 = 0 \text{ et } L_2 \equiv 4x^2 - 4y^2 - 4xy + 5 = 0 .$$

Les asymptotes de ces hyperboles sont les bissectrices de $\{A, B\}$
Voici un graphe du lieu obtenu à l'aide du logiciel Geogebra: