Combinaison à répétition de m objets pris n à n

= combinaison de n objets choisis parmi m, un même objet pouvant se répéter jusqu'à n fois.

On notera D_m^n le nombre des combinaisons à répétition de m objets pris n à n.

EX 1: Voici les trois lettres a, b et c.
Ecrivez les combinaisons à répétition de deux d'entre elles.
rép. aa; ab; ac; bb; bc; cc. On en compte six… $D_3^2 = 6$.
Et de trois d'entre elles.
rép. aaa; aab; aac; abb; abc; acc; bbb; bbc; bcc; ccc. $D_3^3 = 10$.
Parmi ces dix combinaisons, sélectionnons toutes celles qui comprennent au moins un a, et biffons cette lettre a.
Nous obtenons exactement toutes les combinaisons à répétition de deux des trois lettres.
Expliquez pourquoi.

EX 2: Ecrivez les combinaisons à répétition des cinq lettres a, b, c, d, e prises 3 à 3 …
$D_5^3 = 35$.

EX 3: $D_0^0 = 1$ et pour tout naturel i non nul: $D_0^i = 0$.

EX 4: Voici m lettres. Faisons leurs combinaisons à répétition n à n. Il y en a D_m^n.
Ajoutons une lettre, soit z, à l'ensemble des m précédentes et combinons les encore n à n.
Il y aura exactement D_{m+1}^n combinaisons à répétition.
Comptons ces combinaisons à répétition de la manière suivante:

celles où z n'intervient pas: D_m^n
celles qui font intervenir un z: D_m^{n-1}
celles qui font intervenir deux z: D_m^{n-2}
…
celles qui font intervenir n fois la lettre z: $D_m^0 = 1$.

On conclut:

$$\boxed{D_{m+1}^n = \sum_{i=0}^{n} D_m^i}$$

EX 5: Dans le tableau des D_m^n, cette égalité se traduit de la manière suivante:

m \ n	0	1	2	…	n
m	+	+	+	…	+
m+1					=

Elle fournit avec EX 3 le tableau des D_m^n que voici:

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1	0	0	0	0	0	0	…
1	1	1	1	1	1	1	1	…
2	1	2	3	4	5	6	7	…
3	1	3	6	10	15	21	28	…
4	1	4	10	20	35	56	84	…
5	1	5	15	35	70	…		

et donne aussi

m \ n	…	i-1	i
⋮			
j-1			+
j		+	=

qui nous rappelle la formule de Pascal.

* Il y a donc un lien entre combinaisons à répétition et combinaisons simples.

EX 6: Etablissons ce lien! Prouvons à l'aide de trois images que

$$\boxed{D_m^n = C_{m+n-1}^n}$$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	....	n	...
0	1	0	0	0	0		0	
1	1	1	1	$\boxed{1}$	1		1	
2	1	2	$\boxed{3}$	4				
3	1	$\boxed{3}$	6					
4	$\boxed{1}$	4						
⋮								
m	D_m^0	D_m^1	D_m^2	D_m^3			D_m^n	
⋮								

image 1

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	....	n	...
0	1	0	0	0	0		0	
1	1	1	C_2^2	$\boxed{C_3^3}$	1		1	
2	1	C_2^1	$\boxed{C_3^2}$	4				
3	C_2^0	$\boxed{C_3^1}$	6					
4	$\boxed{C_3^0}$	4						
⋮								
m	D_m^0	D_m^1	D_m^2	D_m^3	...		D_m^n	
⋮								

image 2

m \ n	0	1	2	3	4	....	n	...
0	1	0	0	0	0		0	
1	1	1	C_2^2	$\boxed{C_3^3}$	1		1	
2	1	C_2^1	$\boxed{C_3^2}$	4				
3	C_2^0	$\boxed{C_3^1}$	6					
4	$\boxed{C_3^0}$	4						
⋮								
m	C_{m-1}^0	C_m^1	C_{m+1}^2	C_{m+2}^3	...			
⋮								

$$\boxed{D_m^n = C_{m+n-1}^n}$$

image 3