On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire ayant deux issues possibles et deux seulement. On a coutume d'appeler succès s l'une de ces deux issues, et échec e l'autre issue.

EX1: On lance une pièce de monnaie une seule fois.
On peut appeler succès l'obtention de pile, et échec l'obtention de face.

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli consécutives, indépendantes les unes des autres et ayant toutes la même probabilité de succès p.

EX2: On lance un dé non pipé et on appelle succès le fait d'obtenir 6, et bien sûr échec le fait d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5.
En répétant 5 fois de suite cette expérience, on obtient un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire d'un schéma de Bernoulli est la fonction qui détermine le nombre de succès du schéma.

EX3: Si l'on compte le nombre de succès du schéma de Bernoulli décrit dans EX2, on obtient une variable aléatoire X définie sur la catégorie d'épreuve $\Omega = \{s,e\}^5$ qui associe à chaque événement élémentaire, le nombre de succès.
Ainsi, $X : \Omega \to \{0,1,2,3,4,5\}$ et par exemple, $X((s,e,e,s,e)) = 2$.

Loi binomiale = loi de probabilité de la variable aléatoire X d'un schéma de Bernoulli.
On note B(n,p) la loi binomiale relative à un schéma constitué de n épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès égale p.

EX4: Notons p la probabilité d'obtenir 6 lors du lancer du dé et q la probabilité de l'événement contraire. $p = \frac{1}{6}$ et $q = \frac{5}{6}$.

$$p(X=0) = p(e,e,e,e,e) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5 \cong 0,40$$

$$\begin{aligned} p(X=1) &= p(s,e,e,e,e) + p(e,s,e,e,e) + \ldots \text{ (loi de la somme)} \\ &= p \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q + q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q + \ldots \text{ (loi du produit)} \\ &= 5 \cdot p^1 \cdot q^4 \cong 0,40 \end{aligned}$$

$p(X=2) = \ldots$ ça se complique… $= C_5^2 p^2 q^3 \cong 0,16$
etc…

La loi binomiale B(n,p) est définie par $p(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

EX5: Terminez l'EX4 et dressez le tableau de sa loi binomiale.
Calculez l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire définie dans EX3.

Correction de EX5 :

x	p(x)	x.p(x)	x-E(X)	(x-E(X))^2	p(x).(x-E(X))^2
0	0,40188	0	-0,83336	0,69448889	0,279101195
1	0,40188	0,40188	0,16664	0,02776889	0,011159761
2	0,16075	0,3215	1,16664	1,36104889	0,218788609
3	0,03215	0,09645	2,16664	4,69432889	0,150922674
4	0,00322	0,01288	3,16664	10,02760889	0,032288901
5	0,00013	0,00065	4,16664	17,36088889	0,002256916
	1,00001	E(X)=0,83336			V(X)=0,69452
					σ(X)=0,83338