Probabilités

§1. Vocabulaire

Phénomène fortuit ou **expérience aléatoire** = phénomène ou expérience qui admet plusieurs résultats possibles, chacun d'eux étant le fruit du hasard

EX1 = lancer une pièce de monnaie et lire le résultat (pile ou face).
EX2 = lancer un dé non pipé et lire les points affichés.

Catégorie d'épreuve d'une expérience aléatoire = Ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. On désigne cet ensemble par la lettre Ω.

EX3: dans le cas de EX1, $\Omega = \{p, f\}$
EX4: dans le cas de EX2, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Evénement d'une expérience aléatoire = sous-ensemble de la catégorie d'épreuve

EX5: pour EX1, l'événement "obtenir pile" est l'ensemble $A = \{p\}$
EX6: pour EX2, l'événement "obtenir un résultat pair est l'ensemble $B = \{2,4,6\}$

> l'**événement impossible** = $\varnothing$
> l'**événement certain** = Ω
> un singleton est appelé **événement élémentaire**.
> l'événement $A \cap B$ est réalisé ssi les événement A et B sont réalisés tous les deux.
> l'événement $A \cup B$ se réalise ssi au moins un des événements A ou B se réalise.
> l'événement $A \setminus B$ est réalisé ssi A se réalise sans que B ne se réalise.
> les événement A et B sont **contraires** ssi les ensembles A et B sont complémentaires dans Ω.

EX7: Pour EX2, les événements $A = \{1,3,5\}$ et $B = \{2,4,6\}$ sont contraires.

§2. Définitions

Probabilité	=	fonction $p : \wp\Omega \to [0,1], A \mapsto p(A)$ qui vérifie $p(\varnothing) = 0,\ p(\Omega) = 1$ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

(axiomes de Kolmogorov)

EX8: Dans le cas de EX2, si les événements élémentaires sont équiprobables, c'est-à-dire si
$p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = \ldots = p\{6\}$, alors $p\{1\} = p\{2\} = p\{3\} = \ldots = p\{6\} = \frac{1}{6}$
puisque $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \{6\}$
et que $1 = p(\Omega) = p(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \{6\}) = p\{1\} + p\{2\} + \ldots p\{6\} = 6 \cdot p\{1\}$.

EX9: On pourrait très bien imaginer un dé pipé de telle sorte que la probabilité de 6 égale 0,5 et celle des autres événements élémentaires égale 0,1. Un tel dé correspondrait parfaitement à la définition de probabilité.

EX10: une catégorie d'épreuve ne peut être vide.

si Ω est un ensemble fini et si les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A on a: $p(A) \triangleq \frac{\# A}{\# \Omega}$ (= le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles).

(formule de Laplace)

EX11: On lance un dé non pipé deux fois de suite en notant les points obtenus après chaque lancer.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\# \Omega = 36$

Les événements élémentaires étant équiprobables, puisque le dé est non pipé, la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{36}$.

Considérons l'événement A "obtenir 9 au total des deux lancers"?

$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ et $p(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 au deuxième lancer ?

Quelle est la probabilité d'obtenir 6 à au moins un des deux lancers ?

EX12: Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes indiscernables au toucher.

On tire 3 boules au hasard, sans les remettre dans l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur ?

§3. Lois de la somme

1. Cas d'événements disjoints: $\forall A,B \in \wp\Omega : A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
2. Cas d'événements quelconques: $\forall A,B \in \wp\Omega :\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EX13: La première loi de la somme est un des axiomes de Kolmogorov intervenant dans la définition de probabilité.

Nous avons pu utiliser la première loi de la somme dans EX11 et EX12.

EX14: La deuxième loi de la somme se démontre à partir de la première.

EX15: D'un jeu bien mélangé de 32 cartes, on tire une carte au hasard.

Quelle est la probabilité de tirer un roi de pique ?

EX16: Probabilités d'événements contraires: leur somme égale 1

EX17: "obtenir au moins un" et "n'obtenir aucun" sont des événements contraires.

§4. Loi du produit

A et B sont des événements indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

EX18: On lance un dé non pipé deux fois de suite.Quelle est la probabilité d'obtenir un double six?

EX19: Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules bleues.
On tire successivement, avec remise, 4 boules.
Quelle est la probabilité d'obtenir, dans l'ordre, 1 rouge, 1 verte et 2 bleues ?
Quelle est la probabilité d'obtenir 1 rouge, 1 verte et 2 bleues ?

§5. Probabilités conditionnelles

On note $p(A|B)$ la probabilité que l'événement A se réalise
sachant que l'événement B s'est réalisé.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

(formule de Bayes)

EX20: On lance un dé non pipé deux fois de suite.
Quelle est la probabilité que la somme des résultats obtenus soit 8 sachant qu'au premier jet on a obtenu un résultat impair ?

EX21: D'un jeu bien mélangé de 32 cartes on tire successivement, sans remise, 2 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 as sachant que la première carte tirée est un as ?

EX22: Quatre chevaux doivent participer à un Grand Prix.
Voici pour chacun des chevaux la probabilité qu'il gagne:

x	a	b	c	d
p(x)	7/20	3/10	2/10	3/20

Quelle est la probabilité que b gagne si c ne se présente pas au départ de la course ?