Exercices sur les nombres complexes

1. Pour chacune des affirmations suivantes, décidez si elle est vraie. Justifiez votre réponse.

   a. Tout nombre complexe est nul ssi ses parties réelle et imaginaire sont toutes deux nulles.
   b. Tout nombre complexe est réel ssi il est égal à son conjugué.
   c. $\forall z \in C : z + \bar{z} = 2\Re(z)$.
   d. $\forall z \in C : z - \bar{z} = 2\Im(\bar{z})$.
   e. $\forall z \in C : z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
   f. $\forall z \in C : |z| = 1$ ssi $z = z^{-1}$.

2. Effectuez les calculs suivants:

   a. $(4-i)-(3+2i)$
   b. $(4-i)\cdot(3+2i)$
   c. $(3-2i)^2$
   d. $(3-2i)^3$
   e. $\dfrac{1}{3+2i}$
   f. $\dfrac{5+3i}{2-5i}$

3. Ecrivez $3 + 2i$ et $-5 - 3i$ sous forme trigonométrique.

4. Des nombres complexes sont conjugués ssi leurs modules sont égaux et leurs arguments sont opposés. Démontrez.

5. Etablissez les formules de duplication des nombres trigonométriques (cos2x et sin2x) à partir des formules de Moivre et de Newton. Faites de même pour cos3x et sin3x. Généralisez ensuite pour cosnx et sinnx.

6. Calculez:
   a. les racines cubiques de –1.
   b. les racines quatrièmes de 81.
   c. les racines cinquièmes de i.
   d. les racines cubiques de 2 + 3i.
   e. les racines quatrièmes de –2 – 3i.
   f. les racines cinquièmes de 4 + 5i.

   Exprimez vos résultats sous la forme a + bi. (a et b étant arrondis à la troisième décimale).

7. Résolvez dans C (solutions sous la forme a + bi):

   a. $x^2 + 2x + 5 = 0$.
   b. $x^2 + ix + 3 = 0$.
   c. $3x^2 + (1-2i)x + (i-1) = 0$.

8. Démontrez que: $\forall\ z, t \in C : \overline{z+t} = \bar{z} + \bar{t}$ et $\overline{z \cdot t} = \bar{z} \cdot \bar{t}$.

9. Voici le complexe z = a + bi et $x = \dfrac{z^2}{1-z}$.
   Déterminez dans le plan de Gauss l'ensemble des points z pour lesquels x est réel.

10. Notons z le nombre complexe a + bi. Déterminez en fonction de a et de b le module et l'argument de $\dfrac{z+2}{z-1}$.

11. Dans CxC, résolvez le système: $\begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i \\ (1+i)x + 2iy = 5 - i \end{cases}$.