Déterminer les racines cinquièmes du complexe $z = -\sqrt{3} - 2i$

L'écriture trigonométrique de z égale $\sqrt{7}$ cis $229{,}107°$

Remarquons que je préfère exprimer l'argument de z en degrés dans la mesure où, par la suite, il sera plus aisé de manipuler $\frac{k \cdot 360°}{5}$ que $\frac{2k\pi}{5}$.

Nous recherchons $t = r$ cis φ tel que $t^5 = z$

c'est-à-dire tel que r^5 cis $5\varphi = \sqrt{7}$ cis $229{,}107°$.

Ainsi : $r = \sqrt[10]{7}$ et $\varphi = \frac{229{,}107° + k360°}{5}$

En prenant successivement k = 0, 1, 2, 3, 4
nous obtenons les racines cinquièmes de z, à savoir :

$$t_0 = \sqrt[10]{7} \text{ cis } 45{,}821° = 0{,}847 + i \cdot 0{,}871$$
$$t_1 = \sqrt[10]{7} \text{ cis } 117{,}821° = -0{,}567 + i \cdot 1{,}074$$
$$t_2 = \sqrt[10]{7} \text{ cis } 189{,}821° = -1{,}197 - i \cdot 0{,}207$$
$$t_3 = \sqrt[10]{7} \text{ cis } 261{,}821° = -0{,}173 - i \cdot 1{,}202$$
$$t_4 = \sqrt[10]{7} \text{ cis } 333{,}821° = 1{,}090 - i \cdot 0{,}536$$

Exercices supplémentaires :

Résoudre $x^6 + i = 0$

Les solutions sont :

– 0.965926 + 0.258819 i
– 0.707107 – 0.707107 i
– 0.258819 + 0.965926 i
0.258819 – 0.965926 i
0.707107 + 0.707107 i
0.965926 – 0.258819 i

Résoudre $x^3 - 2 - i = 0$

Les solutions sont :

– 0.820363 + 1.01832 i
– 0.471711 – 1.21962 i
1.29207 + 0.201294 i