Déterminez les équations cartésiennes (sous la forme y = ax + b, a et b étant exprimés avec deux décimales) des tangentes issues du point $p=(5,7)$ à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Utilisons la méthode matricielle.

L'équation de E s'écrit aussi $9x^2+16y^2-144=0$.

(1) La polaire P de p a pour matrice $\begin{pmatrix}5 & 7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & -144\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 112 & -144\end{pmatrix}$

Ainsi, $P \equiv 45x+112y-144=0$

(2) Les points d'intersection de P et E s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases}9x^2+16y^2-144=0 \ \text{(i)}\\ 45x+112y-144=0 \ \text{(ii)}\end{cases}$$

De (ii) on tire $y=\frac{1}{112}(144-45x)$, on le remplace dans (i)

et cela donne après quelques lignes de calcul : $1009x^2-1440x-10240=0$

qui admet pour solution $x=3,978215$ ou $x=-2,551059$.

En retournant à (ii), on détermine ainsi les deux points de $P \cap E$:

$t_1=(3,978215\ ;\ -0,312676)$ et $t_2=(-2,551059\ ;\ 2,310694)$.

(3) Les tangentes recherchées sont les polaires T_1 et T_2 respectivement de t_1 et t_2.

$$T_1=\begin{pmatrix}3,978215 & -0,312676 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & -144\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35,803935 & -5,002816 & -144\end{pmatrix}$$

$T_1 \equiv 35,803935x-5,002816y-144=0$ et par conséquent : $T_1 \equiv y=7,16x-28,78$

De la même manière, on calcule la polaire de T_2 et on obtient : $T_2 \equiv y=0,62x+3,89$.

(4) Un joli dessin pour clôturer tout ça :