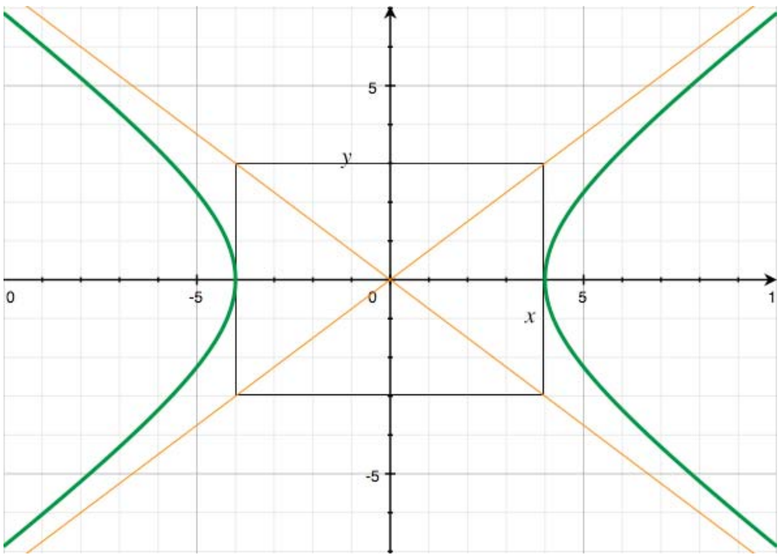
Voici l'hyperbole H d'équation $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

1. Esquissez son graphe cartésien
2. Détermnez les coordonnées de ses foyers
3. Détermnez les équations cartésiennes de ses directrices et de ses asymptotes
4. Déterminez les équations cartésiennes des tangentes issues du point p = (3,4) à H.

1.



* $a = 4,\ b = 3$ et
$a^2 + b^2 = c^2$.
Donc $c = 5$.

2. coordonnées des foyers :
$(5,0)$ et $(-5,0)$.

3. équations des directrices :
$x=\frac{16}{5}$ et $x=\frac{-16}{5}$.
équations des asymptotes :
$y=\frac{3}{4}x$ et $y=\frac{-3}{4}x$.

4. Résolvons cet exercice par la méthode analytique.

On considère le faisceau F de droites de sommet p : $F \equiv \begin{cases} x = \lambda m + 3 \\ y = \lambda n + 4 \end{cases}$

et on recherche les droites de ce faisceau F qui ont exactement un point d'intersection avec H.
Appliquons la méthode en calculant successivement :

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$9(\lambda m+3)^2 - 16(\lambda n+4)^2 = 144$$

…

$$(9m^2-16n^2)\lambda^2 + (54m-128n)\lambda - 319 = 0$$

Cette dernière équation est du second degré en l'inconnue λ. Son réalisant doit être nul afin que la valeur de λ soit unique et que l'intersection de F et H soit un singleton.
Calculons et simplifions ce réalisant, on obtient : $25m^2 - 24mn - 7n^2 = 0$
Les tangentes recherchées n'étant sûrement pas horizontales, leur vecteur directeur (m,n) aura sa deuxième composante non nulle. Je peux donc poser n = 1
Il reste dès lors à résoudre : $25m^2 - 24m - 7 = 0$, ce qui donne m = 1,194 ou m = – 0,234.
En substituant ces valeurs de m et n dans l'équation de F, j'obtiens les équations paramétriques des deux tangentes recherchées. Il suffit ensuite d'éliminer le paramètre pour obtenir leurs équations cartésiennes :

$$T_1 \equiv x - 1{,}194y + 1{,}776 = 0 \qquad T_1 \equiv y = 0{,}838x + 1{,}478$$
$$T_2 \equiv x + 0{,}234y - 3{,}936 = 0 \quad \text{ou} \quad T_2 \equiv y = -4{,}274x + 16{,}821$$