Etude d'une conique après réduction de son équation

Voici la conique C donnée dans le plan équipé d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
$C \equiv 6x^2 - 6xy + 9y^2 + 14x - 100y + 185 = 0$.

Sa matrice $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 9 & -50 \\ 7 & -50 & 185 \end{pmatrix}$ nous donne des informations sur son genre affine :

$C^{33} = 63 > 0 \vdash$ C est une ellipse.
$\text{dét}\mathcal{C} = -5016 \neq 0 \vdash$ C est non dégénérée.

La présence d'un terme en xy dans l'équation de C garantit que les axes de symétrie de C ne sont pas parallèles aux axes du repère. On effectue donc un rotation T du repère $\mathcal{R}$, d'angle α autour de l'origine du repère de telle manière que le nouveau repère $\mathcal{R}' = T(\mathcal{R})$ ainsi obtenu ait ses axes parallèles aux axes de symétrie de C.

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ étant l'équation de C dans $\mathcal{R}$,

$f\left(\mathcal{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$ où $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sera l'équation de C dans $\mathcal{R}'$.

On calcule l'équation de C dans $\mathcal{R}'$:

$$6(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 - 6(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 9(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2$$
$$+14(x\cos\alpha - y\sin\alpha) - 100(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 185 = 0$$

Le coefficient du terme en xy est nul car $\mathcal{R}'$ a ses axes parallèles aux axes de C.
Calculons ce coefficient :

$$-12\sin\alpha\cos\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\sin^2\alpha + 18\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

On déduit successivement :

$$\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$$
$$\text{tg}2\alpha = 2$$
$$\alpha = 31°43'$$

Recalculons l'équation de C dans $\mathcal{R}'$

$$x^2\left(6\cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha + 9\sin^2\alpha\right) + y^2\left(6\sin^2\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha + 9\cos^2\alpha\right) + xy(0)$$
$$+x(14\cos\alpha - 100\sin\alpha) + y(-14\sin\alpha - 100\cos\alpha) + 185 = 0$$

D'où : $C' \underset{\mathcal{R}'}{\equiv} 4{,}15x^2 + 10{,}85y^2 - 40{,}66x - 92{,}43y + 185 = 0$.

Pour obtenir l'équation réduite de C, il faut maintenant transformer le repère $\mathcal{R}'$ à l'aide de la translation S, de vecteur le centre de C.
Le centre de C, dans $\mathcal{R}'$ s'obtient facilement à partir des deux premières lignes

$\begin{array}{|ccc} 4{,}15 & 0 & -20{,}33 \\ 0 & 10{,}85 & -46{,}22 \end{array}$ de la matrice de C. Il s'agit donc du point $(4{,}9\ ;\ 4{,}26)$.

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ étant l'équation de C dans $\mathcal{R}'$

$$f\left(\mathcal{S}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=0 \text{ où } \mathcal{S}=\begin{pmatrix}4,9\\4,26\end{pmatrix}$$ sera l'équation de C dans $\mathcal{R}''=\mathcal{S}(\mathcal{R}')$.

On calcule l'équation de C dans $\mathcal{R}''$:

$C \underset{\mathcal{R}''}{\equiv} 4,15(x+4,9)^2+10,85(y+4,26)^2-40,66(x+4,9)-92,43(y+4,26)+185=0$

$C \underset{\mathcal{R}''}{\equiv} 4,15x^2+10,85y^2=111,44$

$C \underset{\mathcal{R}''}{\equiv} \dfrac{x^2}{5,18^2}+\dfrac{y^2}{3,2^2}=1$

On peut maintenant calculer les points et droites remarquables de C dans $\mathcal{R}''$ et déduire leurs coordonnées et équations dans $\mathcal{R}$.

Voici le tableau des résultats.

Repère	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$	$\mathcal{R}''$
Equation	$6x^2-6xy+9y^2+14x$ $-100y+185=0$	$4,15x^2+10,85y^2-40,66x$ $-92,43y+185=0$	$\dfrac{x^2}{5,18^2}+\dfrac{y^2}{3,2^2}=1$
Sommets	$(6,34;8,92),(-2,48;3,48)$ $(0,25;8,92),(3,61;3,48)$	$(10,08;4,26),(-0,28,4,26)$ $(4,9;7,46),(4,9;1,06)$	$(5,18;0),(-5,18;0)$ $(0;3,2),(0,-3,2)$
Centre	$(1,93;6,2)$	$(4,9;4,26)$	$(0,0)$
Foyers	$(-1,53;4,06),(5,39;8,34)$	$(0,83;4,26),(8,97;4,26)$	$(-4,07;0),(4,07;0)$
Axes de symétrie	$y=-1,6x+9,25$ $y=0,62x+5,01$	$x=4,9$ $y=4,26$	$x=0$ $y=0$
Directrices	$y=-1,62x+21,87$ $y=-1,62x-3,22$	$x=11,49$ $x=-1,69$	$x=6,59$ $x=-6,59$

L'excentricité de C est 0,79 et voici son graphe cartésien.