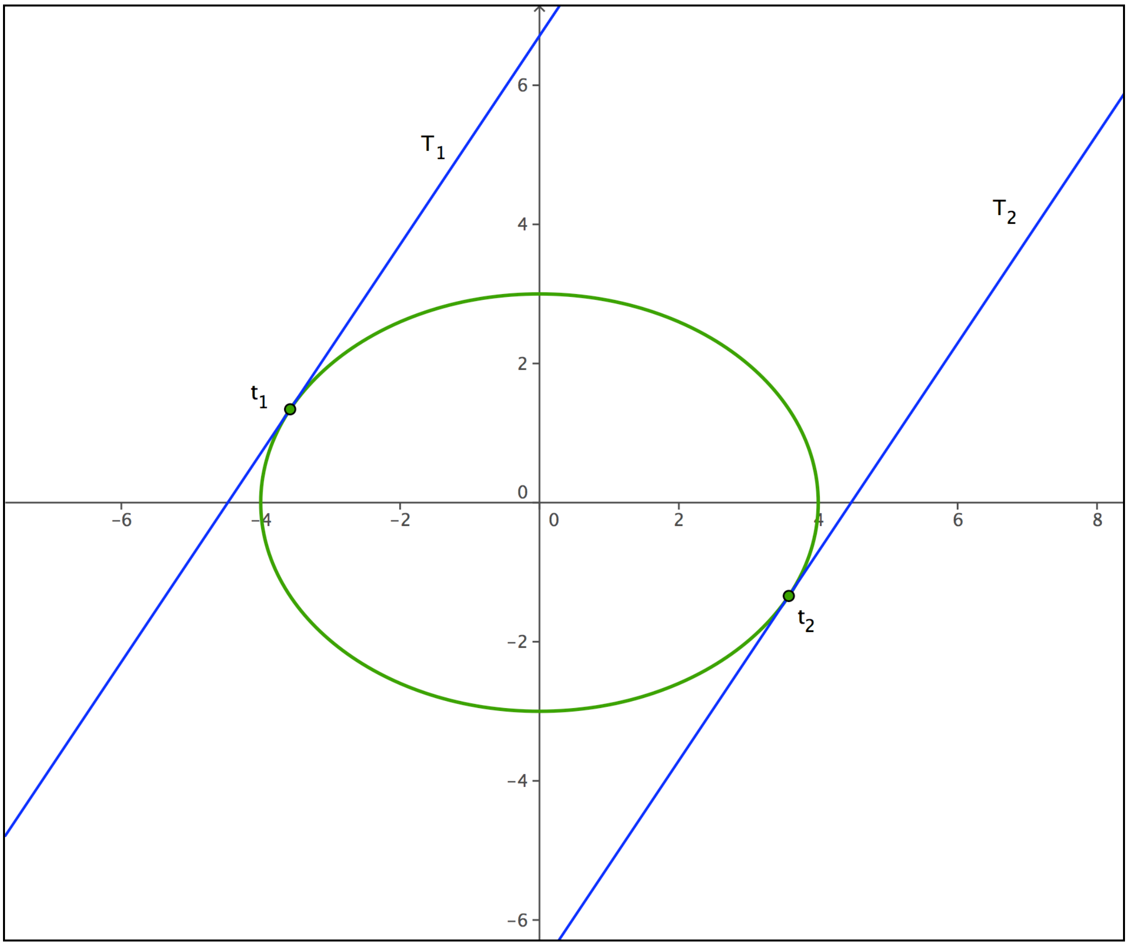
Déterminez les équations cartésiennes des tangentes de pente $\frac{3}{2}$ à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

Voici pour commencer, un dessin de ce qui est donné et demandé …



… et ensuite trois méthodes de calcul des équations des tangentes.

A. Méthode différentielle.

Le graphe de l'ellipse E se décompose en deux graphes de fonctions :

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$

Les pentes des tangentes à ces fonctions sont données par leurs dérivées :

$$f_1'(x) = -\frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}} \quad \text{et} \quad f_2'(x) = \frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$$

$$f_1'(x) = \frac{3}{2} \text{ ssi } -\frac{3x}{4\sqrt{16-x^2}} = \frac{3}{2} \text{ ssi } \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -2 \text{ ssi } x \le 0 \text{ et } x^2 = 4\left(16-x^2\right) \text{ ssi } x = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

De même : $f_2'(x) = \frac{3}{2}$ ssi $x = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

Il reste à déterminer :

1) La tangente à f_1 au point d'abscisse $-\frac{8}{\sqrt{5}}$.

Elle a pour pente $\frac{3}{2}$ et passe par le point $\left(-\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Son équation cartésienne est $T_1 \equiv y=\frac{3}{2}x+3\sqrt{5}$.

2) La tangente à f_2 au point d'abscisse $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

Elle a pour pente $\frac{3}{2}$ et passe par le point $\left(\frac{8}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

Son équation cartésienne est $T_2 \equiv y=\frac{3}{2}x-3\sqrt{5}$.

B. Méthode analytique.

Considérons le faisceau $F_\lambda \equiv y=\frac{3}{2}x+\lambda \;\; (\lambda\in\mathbb{R})$ des droites de pente $\frac{3}{2}$,
et recherchons les droites de F_λ qui sont tangentes à E càd celles qui coupent E en un unique point.

Examinons donc le système $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 & (1)\\ y=\dfrac{3}{2}x+\lambda & (2)\end{cases}$

et déterminons la (les) valeur(s) de λ pour qu'il ait une solution unique (x,y).

Calculons !
On multiplie (1) par 144 et on remplace (2) dans (1) :

$$9x^2+16\left(\frac{3}{2}x+\lambda\right)^2=144$$

$$45x^2+48\lambda x+16\lambda^2-144=0$$

Cette équation a une et une seule solution ssi son réalisant est nul.

$$(24\lambda)^2-45\left(16\lambda^2-144\right)=0$$

$$144\lambda^2=45\cdot 144$$

$$\lambda^2=45$$

$$\lambda=\pm\ 3\sqrt{5}$$

Les tangentes recherchées sont $T_1 \equiv y=\frac{3}{2}x+3\sqrt{5}$ et $T_2=y=\frac{3}{2}x-3\sqrt{5}$.

C. Méthode matricielle (les calculs se font dans le plan projectif).

Les droites de pente $\frac{2}{3}$ admettent le point $i=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ comme point à l'infini.

La question devient : quelles sont les tangentes à E issues de i ?

Notons $\mathcal{E}$ la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de E.

Calculons

1°) P = la polaire de i par rapport à E = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

2°) Les points d'intersection de P et E (t_1 et t_2) s'obtiennent en résolvant le système

$\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0 \\ 3x + 8y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$. Un calcul immédiat fournit : $t_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $t_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

3°) Les tangentes recherchées sont les polaires de t_1 et t_2 par rapport à E.

$$T_1 = \begin{pmatrix} -8 & 3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 8 & -3 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Conclusions dans le plan cartésien :

$T_1 \equiv -3x + 2y - 6\sqrt{5} = 0$ et $T_2 \equiv 3x - 2y - 6\sqrt{5} = 0$

ou encore

$T_1 \equiv y = \frac{3}{2}x + 3\sqrt{5}$ et $T_2 \equiv y = \frac{3}{2}x - 3\sqrt{5}$.

Quel bonheur !

Les trois méthodes de calcul fournissent le même résultat.