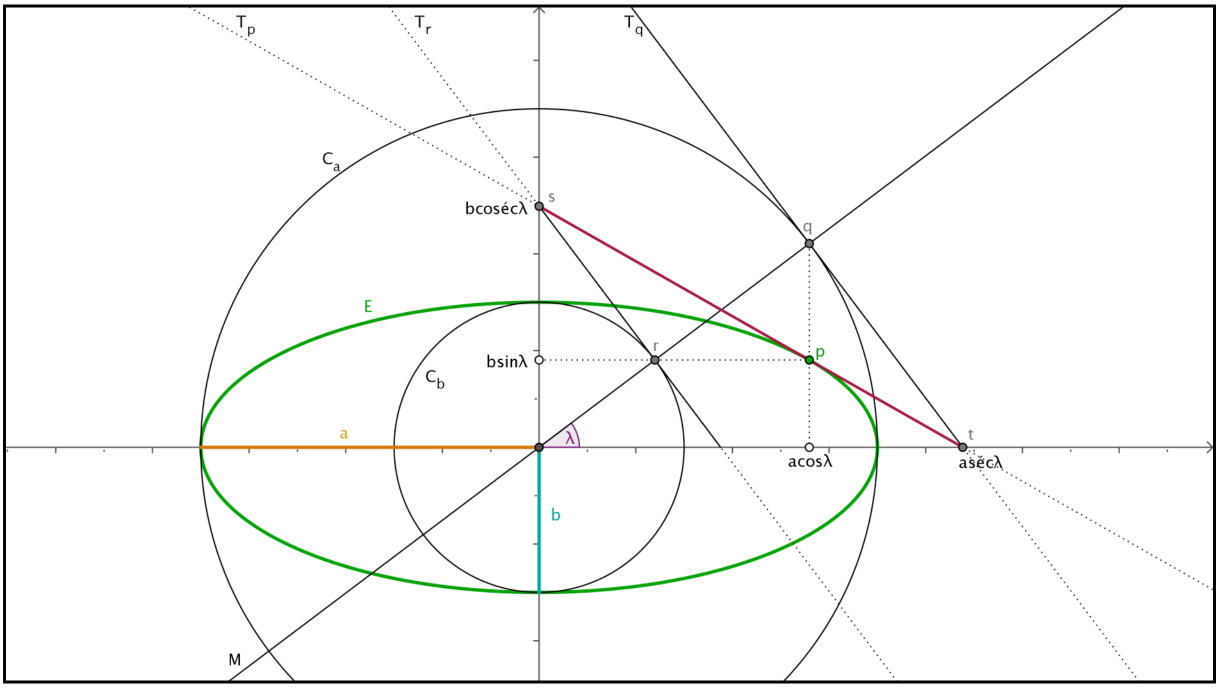
Construction des tangentes à une ellipse.

Les équations paramétriques d'une ellipse E, de grand axe 2a, de petit axe 2b et rapportée à ses axes, s'écrivent $E \equiv \begin{cases} x = a\cos\lambda \\ y = b\sin\lambda \end{cases}$.

Elles fournissent une méthode pour construire les points de E :
la méthode des cercles concentriques.

> RAPPEL :
> On trace les cercles concentriques C_a et C_b de rayons respectifs a et b et de centre, le centre de E.
> Par le centre de E, on trace une droite M formant un angle λ avec l'axe des x.
> Cette droite M coupe C_a en q et C_b en r.
> L'abscisse de q (= acosλ) et l'ordonnée de r (= bsinλ) fournissent la coordonnée du point p de E.



► La tangente T_q au cercle C_a, menée par le point p, coupe l'axe des x en t.
► La tangente T_r au cercle C_b, menée par le point r, coupe l'axe des y en s.

Nous allons prouver que :

☐ **La droite st est la tangente T_p à l'ellipse E menée par le point p.**

Démonstration :
Les points t et s ont pour coordonnées respectivement $(a\,\text{séc}\lambda, 0)$ et $(0, b\,\text{coséc}\lambda)$ [cfr inversion].
La droite st a donc pour coordonnée homogène

$$\begin{pmatrix} -b\,\text{coséc}\lambda & -a\,\text{séc}\lambda & ab\,\text{séc}\lambda\,\text{coséc}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\cos\lambda & -a\sin\lambda & ab \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la tangente T_p est la polaire de p par rapport à E. Elle se calcule facilement :

$$\begin{pmatrix} a\cos\lambda & b\sin\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab^2\cos\lambda & a^2b\sin\lambda & -a^2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\cos\lambda & -a\sin\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi : st = T_p ■