Géométrie de l'espace

Pour les élèves déterminés…

1. Déterminez une équation cartésienne du plan défini par le système d'équations paramétriques suivant : $\alpha = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 1 + 3\mu \end{cases}$.

2. Déterminez un système d'équations paramétriques
du plan β d'équation cartésienne $3x - 2y + 6z - 3 = 0$.

3. Déterminez une équation cartésienne du plan γ comprenant les points (1,2,3), (2,1,3), (3,1,2).

4. Déterminez un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de chacune des droites suivantes :
A comprenant le point (1,-2,3) et de vecteur directeur (2,0,7).
B comprenant les points (3,0,7) et (-2,1,7).

5. Déterminez le point de percée de la droite D dans le plan δ.
$$D \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda + 2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0\,.$$

6. Déterminez le point de percée de la droite D dans le plan δ.
$$\delta \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0 \quad \text{et} \quad D \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}.$$

7. Déterminez une équation cartésienne du plan ε comprenant le point p et contenant la droite D :
$$p = (0,0,7) \quad \text{et} \quad D \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}.$$

8. Déterminez une équation cartésienne du plan ζ comprenant le point p et parallèle au plan η :
$p = (3,1,-2)$ et $\eta \equiv 4x - 2y + 5z - 3 = 0$.

9. Quelles sont les équations cartésiennes canoniques des plans parallèles à un des trois plans de base : xoy, yoz, zox ?

10. Quelles sont les équations cartésiennes canoniques des plans parallèles à un des trois axes de base : X, Y, Z ?

11. Déterminez une équation cartésienne du plan ζ comprenant le point p et parallèle au plan η :
$$p = (1,3,-2) \quad \text{et} \quad \eta = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda - \mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 1 + 3\mu \end{cases}.$$

12. Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite A comprenant le point p et parallèle à la droite B :
$$p = (4,1,0) \quad \text{et} \quad B \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda + 2 \\ z = 5 \end{cases}.$$

13. Déterminez un système d'équations cartésiennes de la droite A comprenant le point p et parallèle à la droite B :

$$p = (4,2,1) \text{ et } B \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}.$$

14. Déterminez une équation cartésienne du plan θ orthogonal à la droite D et comprenant le point p:

$$p = (3,2,-1) \text{ et } D \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda + 2 \\ z = 5 \end{cases}.$$

15. Déterminez un système d'équations paramétriques de la droite D orthogonale au plan ι et passant par le point p : p = (3,3,3) et $\iota \equiv x + 2y + 3z + 4 = 0$.

16. Déterminez une équation cartésienne du plan κ contenant la droite D et orthogonal au plan ν :

$$D \equiv \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = -\lambda + 2 \\ z = 2\lambda \end{cases} \text{ et } \nu \equiv \begin{cases} x = \lambda + \mu + 1 \\ y = 2\lambda + \mu - 1 \\ z = \lambda - 2\mu + 3 \end{cases}.$$

17. Quelle est la distance des points a = (2,-3,4) et b = (2,2,7) ?

18. Calculez la distance du point p à la droite D (avec les données de l'énoncé 14).

19. Calculez la distance du point p à la droite B (avec les données de l'énoncé 13).

20. Calculez la distance du point p au plan ι (avec les données de l'énoncé 15).

21. Calculez la distance du point p au plan η (avec les données de l'énoncé 11).

22. Déterminez une équation cartésienne des sphères
S_1 de centre c = (1,2,3) et de rayon r = 4,
S_2 de rayon r = 2 et comprenant les points a = (1,0,0), b = (0,1,0), c = (0,0,1),
et S_3 comprenant les points a = (1,0,0), b = (0,1,0), c = (0,0,1), d = (1,1,1).

23. Déterminez une équation cartésienne du plan π tangent à la sphère S de centre c = (1,0,-1) et de rayon r = 3 au point p = (3,1,1).

24. Déterminez l'intersection de la sphère S de centre c = (0,1,2) et de rayon r = 5 avec la droite D qui comprend les points a = (0,0,0) et b = (1,1,1).

25. Déterminez l'intersection de la sphère $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0$ avec le plan ξ d'équation $5x + 3y + 6z - 2 = 0$.

26. Etudiez les positions relatives
    - d'une droite et d'une sphère
    - d'un plan et d'une sphère
    - de deux sphères.

27. Déterminez une équation cartésienne du plan ψ médiateur du segment de droite défini par les points a = (2,-1,6) et b = (4,1,2).

28. Déterminez le point q symétrique du point p par rapport au plan ρ :

$$p = (4,0,7) \text{ et } \rho \equiv 5x + 3y + 6z - 2 = 0.$$

Et pour les costauds…

29. Déterminez la distance des deux droites A et B :

$$A \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \quad ; \quad B \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

30. Les points a = (3,0,0), b = (0,2,0) et c = (0,0,1) étant donnés, déterminez :
   a. Une équation cartésienne du plan π des points a, b et c.
   b. Un système d'équations paramétriques de la droite A qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à π.
   c. Un système d'équations paramétriques de la droite B passant par le point c, incluse au plan π et perpendiculaire à la droite ab.
   d. Le point d'intersection des droites A et B, s'il existe.

31. On donne le point p = (3,0,7) et le plan $\xi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$. Déterminez :
   a. Un système d'équations paramétriques de la droite A passant par le point p et de vecteur directeur (3,2,1).
   b. La coordonnée du point de percée de la droite A dans le plan ξ.
   c. Un système d'équations cartésiennes (sous la forme I♥) de la projection orthogonale B de la droite A sur le plan ξ.
   d. Une équation cartésienne du plan ψ comprenant le point p et perpendiculaire à la droite A.
   e. Un système d'équations cartésiennes (I♥) de la droite C, intersection de ξ et ψ.

Définitions données avec les conventions habituelles d'écriture
$\forall\, x,y \in E_o :\ \cos(x,y) \triangleq \dfrac{\langle x \vert y \rangle}{\Vert x \Vert \cdot \Vert y \Vert}\ ,\ \langle x \vert y \rangle \triangleq \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ et $\Vert x \Vert \triangleq \sqrt{\langle x \vert x \rangle}$.
Angle de deux droites (éventuellement gauches) $\triangleq$ Angle de leurs vecteurs directeurs.
Angle de deux plans $\triangleq$ Angle de leurs vecteurs normaux.
Angle d'une droite et d'un plan $\triangleq$ Angle de la droite et de sa projection orthogonale sur le plan.

32. Déterminez :
   a. l'angle des droites A et B de l'exercice 29.
   b. l'angle de la droite D et du plan δ de l'exercice 6.
   c. l'angle des plans α et β des exercices 1 et 2.

Et, pour terminer, un conseil…

Pour tous exercices supplémentaires ainsi que pour un aperçu de la théorie, on consultera les intéressants livres que voici :

- *Mathématisons 65* et *Mathématisons 67*, d'Adam, Goossens et Lousberg, éditions De Boeck
- *Mathématiques de base*, de F. Ayres, série Schaum.