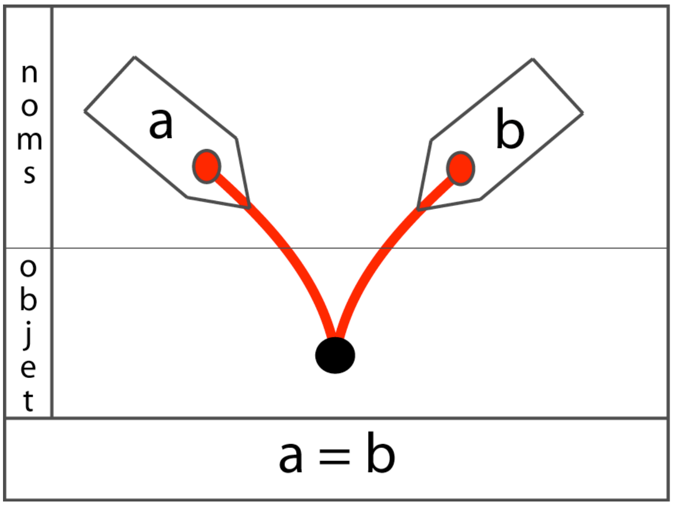
Petit lexique de base

1. Egalité (=)

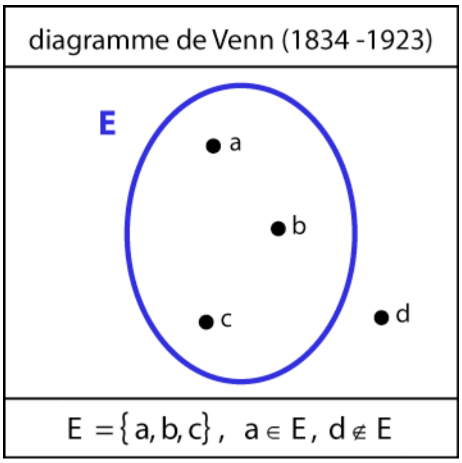
On écrit a = b et on lit « a égale b » ou « a est égal à b » lorsque les symboles a et b sont des noms différents qui désignent le même objet. L'égalité, c'est la synonymie.



EX : vélo = bicyclette ; Albert II = le roi des belges (en septembre 2005)

2. Ensemble

La notion d'ensemble est une notion première ou primitive, de même que celle d'élément et d'appartenance. Intuitivement, le terme « ensemble » évoque l'idée de collection, de groupement…
Un ensemble est constitué des éléments qui lui appartiennent.
Le plus souvent, les ensembles sont notés par des lettres majuscules latines et leurs éléments par des lettres minuscules latines.
Il est commode de représenter un ensemble par une courbe plane fermée dont les points intérieurs sont les éléments de l'ensemble.



REM : Le symbole ▶ se lit « voici ». Certains le lisent aussi « soit ».
Il introduit une définition locale, c'est-à-dire une définition qui n'est valable que le temps d'un exercice ou d'un théorème.

3. Quantificateurs

Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout »
Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe »

EX : ▶ C = l'ensemble des élèves de cinquième du Collège Saint-Pierre
▶ A = l'ensemble des anges
La proposition « $\forall x \in C, \exists y \in A : y$ est ange gardien de x » signifie « tous les élèves de cinquième du Collège ont un ange gardien ».

EX : Jamais de quantificateur devant un nom propre.
Les écritures $\forall 3 \in \mathbb{N}$ ou $\exists 3 \in \mathbb{N}$ sont à proscrire.

4. Connecteurs logiques

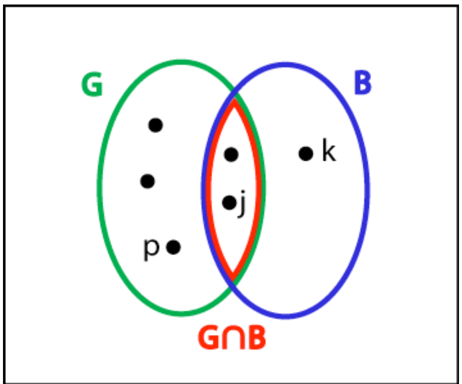
négation (~) NON

EX : La proposition P = « il pleut » a pour négation ~P = « il ne pleut pas »

conjonction ($\wedge$) ET

EX : Voici les propositions G = « Jean est grand » et B = « Jean est beau »
$*$ G $\wedge$ B = « Jean est grand et beau »

EX : Lien entre conjonction ($\wedge$) et intersection d'ensembles ($\cap$)

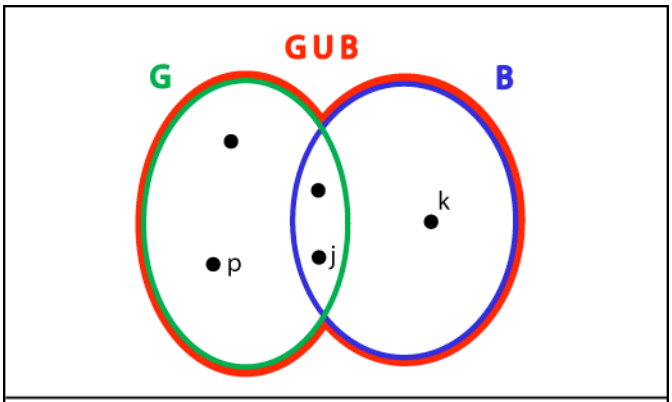


$j \in G \cap B$ parce que $j \in G$ et $j \in B$

disjonction ($\vee$) OU

EX : Voici les propositions G = « Jean est grand » et B = « Jean est beau »
$*$ $G \vee B$ = « Jean est grand ou beau » signifie que soit Jean est grand mais pas beau, soit beau mais pas grand, soit à la fois grand et beau.

EX : Lien entre disjonction ($\vee$) et réunion d'ensembles ($\cup$)



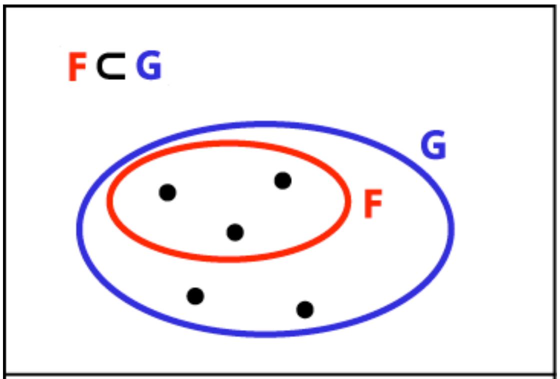
p, j et k $\in G \cup B$ parce que p $\in$ G, j $\in$ G et k $\in$ B

implication ($\Rightarrow$) IMPLIQUE ; si … alors …

EX : Voici les propositions P = « il pleut » et Q = « la route est mouillée »
L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit souvent « s'il pleut alors la route est mouillée »,
et elle signifie que « chaque fois qu'il pleut, la route est mouillée »

EX : La plupart des professeurs et des élèves abusent du symbole $\Rightarrow$ et confondent son usage avec celui du symbole de déduction (voir plus bas).

EX : Lien entre implication ($\Rightarrow$) et inclusion d'un ensemble dans un autre ($\subset$)



$\forall x : x \in F \Rightarrow x \in G$

équivalence logique ($\Leftrightarrow$) SI ET SEULEMENT SI ; ssi

EX : Pour tout rectangle K
K est carré $\Leftrightarrow$ K a ses côtés de même longueur

EX : Lien entre équivalence ($\Leftrightarrow$) et égalité d'ensembles
▶ E et F des ensembles
$E = F$ ssi $(\forall x : x \in E \Leftrightarrow x \in F)$

déduction ($\vdash$) donc, d'où, …

EX : $3 + 2 = 5 \;\vdash\; 3 = 5 - 2$

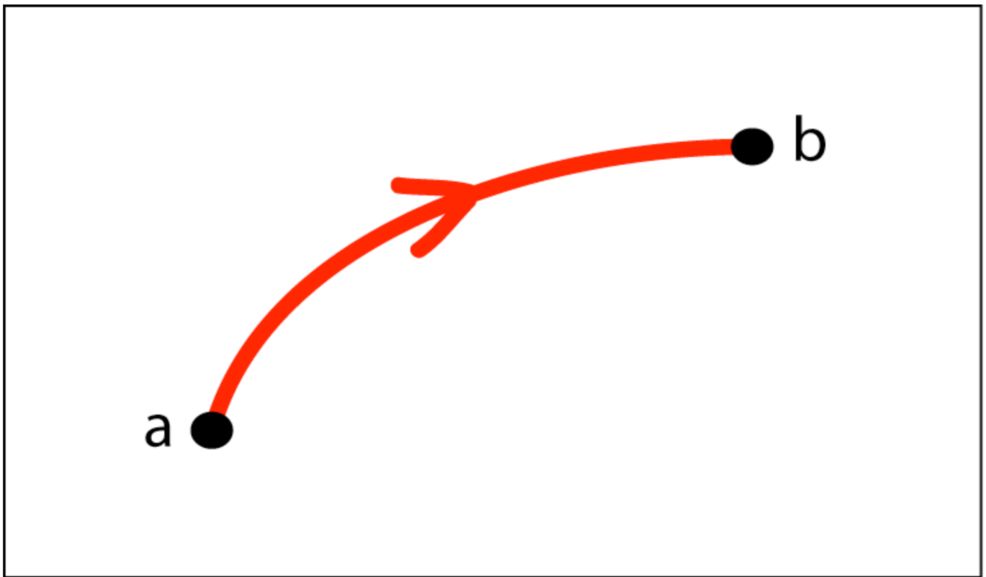
5. Couple : notion première ou primitive

EX : les couples Roméo et Juliette, Philippe et Mathilde, etc…
EX : le couple de nombres (3, 4).
EX : le couple Roméo et Juliette = le couple Juliette et Roméo

Les couples sont souvent appelés « paires ordonnées » alors qu'en réalité l'ordre des éléments n'a aucune importance. C'est leur rôle qui compte.
Cependant dans l'écriture (3, 4), le rôle des éléments 3 et 4 est précisé par l'ordre de leur écriture. Ainsi, le fait d'écrire 3 à gauche de la virgule signifie que 3 joue le rôle d'abscisse et le fait d'écrire 4 à droite de la virgule signifie que 4 joue le rôle d'ordonnée.

EX : le couple de nombres $(3,4) \neq$ le couple de nombres $(4,3)$

La notion de couple est souvent introduite à l'aide des flèches d'un graphe sagittal

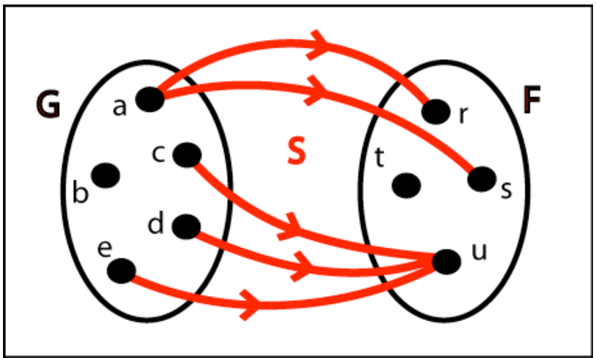


a est l'origine et b l'extrémité du couple (a,b)

EX : $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d$

6. Relation = Ensemble de couples (définition)

EX : la relation S = « a pour soeur » définie de l'ensemble $G = \{a, b, c, d, e\}$ de garçons vers l'ensemble $F = \{r, s, t, u\}$ de filles.

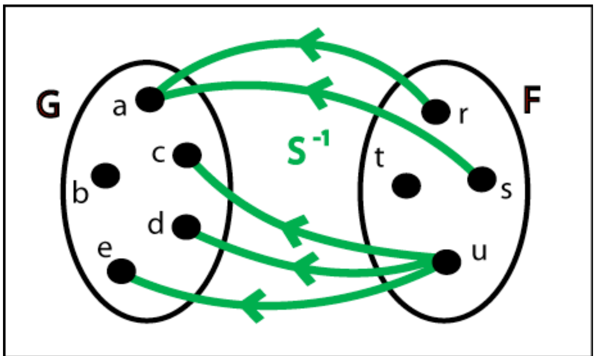


$S = \{(a,r),(a,s),(c,u),(d,u),(e,u)\}$

Notation : $(d,u) \in S \Leftrightarrow dSu$

7. Réciproque de la relation S (notée S^{-1})

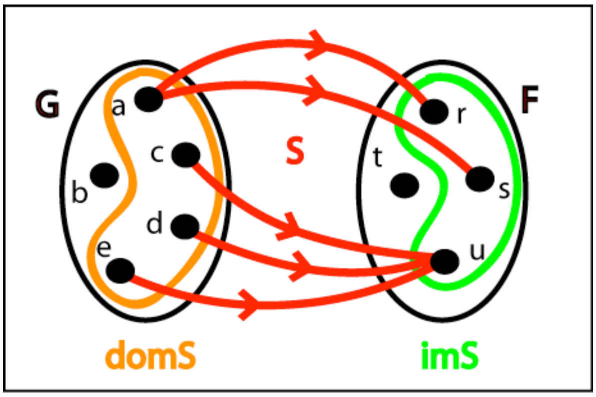
La réciproque S^{-1} de S est la relation obtenue en retournant les flèches du graphe de S.
Relation réciproque = Relation retournée.
En langage symbolique : $S^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in S\}$



$S^{-1} = \{(r,a),(s,a),(u,c),(u,d),(u,e)\}$

8. Domaine de la relation S = dom S = Ensemble des origines des couples de S

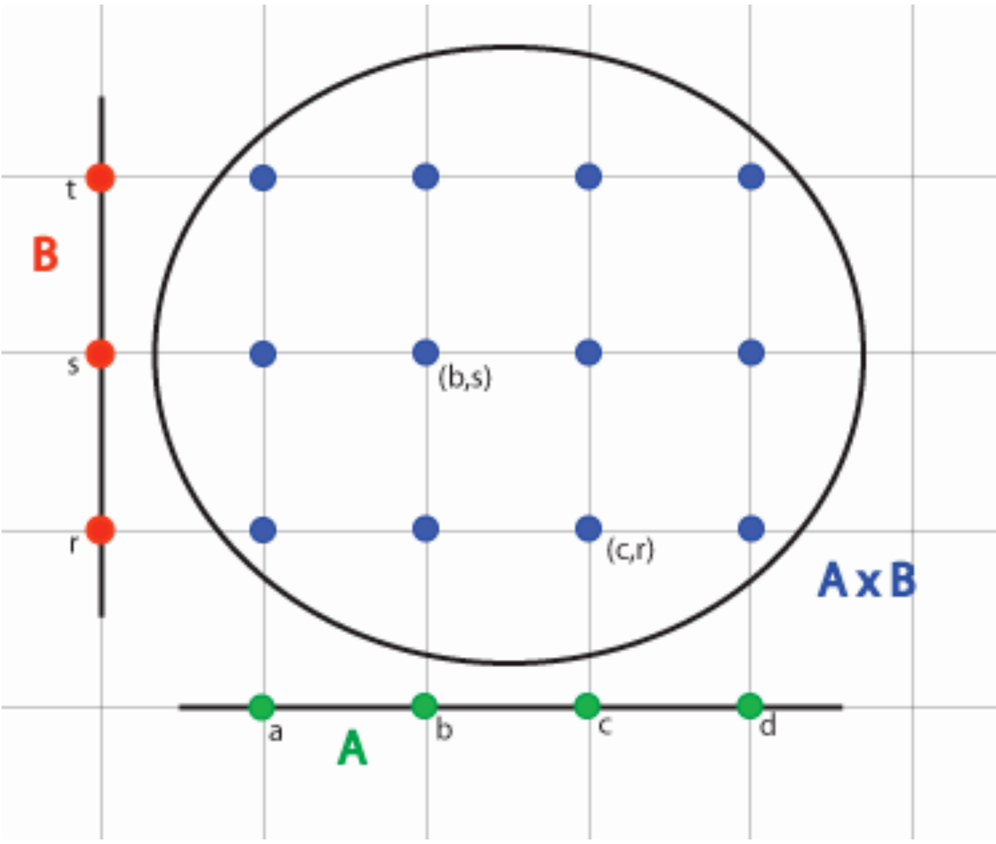
9. Image de la relation S = im S = Ensemble des extrémités de la relation S



EX : $\text{im } S = \text{dom } S^{-1}$ et $\text{dom } S = \text{im } S^{-1}$

10. Produit cartésien de deux ensembles

▶ A et B des ensembles
$A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ et } b \in B\}$ (définition du produit cartésien de A par B)



EX : $A \times A = \{(a,b) | a \in A \text{ et } b \in A\}$

Il ne faut pas confondre $A \times A$ avec la diagonale de $A \times A$, à savoir $\{(a,a) | a \in A\}$.

EX : Faites un graphe cartésien de $A \times A$ et de la diagonale de $A \times A$

EX : Le cardinal d'un ensemble A, c'est le nombre de ses éléments.
On le note #A.

EX : On observe que #AxB = #A · #B.

11. Relation de A vers B

$\forall S$ relation, $\forall A, B$ ensembles :

$$\text{S est une relation de A vers B}$$
$$\text{ssi}$$
$$S \subset A \times B$$
$$\text{ssi}$$
$$\text{domS} \subset A \text{ et } \text{imS} \subset B$$

définition

EX : Faites un graphe sagittal et un graphe cartésien de la relation S de A vers B définie de la manière suivante : $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{r, s, t\}$, $S = \{(a, r), (a, s), (b, s), (d, t)\}$

12. Relation définie dans A

$\forall S$ relation, $\forall A$ ensemble :

$$\text{S est une relation définie dans A}$$
$$\text{ssi}$$
$$S \subset A \times A$$
$$\text{ssi}$$
$$\text{domS} \subset A \text{ et } \text{imS} \subset A$$

définition

EX : Faites un graphe cartésien et un graphe sagittal de la relation définie dans l'ensemble de nombres entiers $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ et qui à chacun de ces nombres fait correspondre son carré.

13. Fonction - Application

Remarque : Fonction = Application. Les mots ***fonction*** et ***application*** sont synonymes.

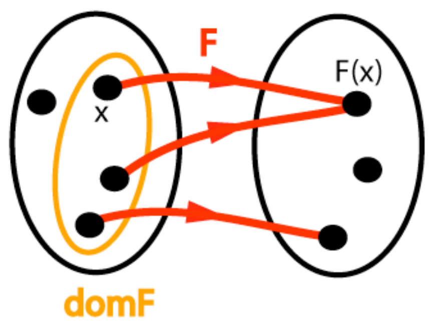
Pour toute relation F :

$$\text{F est une FONCTION}$$
$$\text{ssi}$$
$$\forall x \in \text{domF}, \exists ! y : (x, y) \in F$$

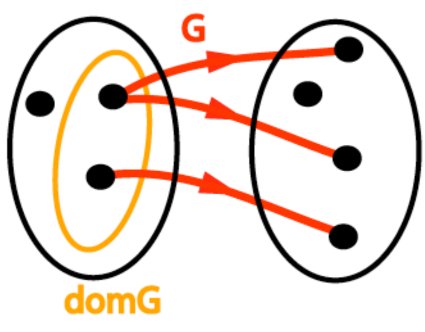
L'unique objet y est noté F(x)

définition

Terminologie : On dit que F(x) est l'image de x par F ou la valeur de F en x.
On dit encore que F applique x sur F(x) ou que F envoie x sur F(x).



F est une fonction



G n'est pas une fonction

Notation : La plupart du temps, les fonctions sont désignées par des lettres minuscules latines : f, g, h…

Pour toute fonction f et pour tous ensembles A et B :

$$f \text{ est une fonction de } A \textbf{ vers } B$$
$$\text{ssi}$$
$$f \subset A \times B$$
$$\text{ssi}$$
$$\operatorname{dom} f \subset A \text{ et } \operatorname{im} f \subset B$$
$$\text{ssi}$$
$$f : A \to B$$

définition

Notation : L'écriture $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ signifie que f est une fonction de l'ensemble A vers l'ensemble B, qui applique l'élément x de A sur l'élément f(x) de B.

EX : $f : R \mapsto R, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

Cette fonction f sera parfois présentée brièvement $f : x \mapsto \sqrt{x}$ ou encore $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour toute fonction f et pour tous ensembles A et B :

$$f \text{ est une fonction de } A \textbf{ dans } B$$
$$\text{ssi}$$
$$\operatorname{dom} f = A \text{ et } \operatorname{im} f \subset B$$

définition

EX : $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas une fonction de R dans R, c'est une fonction de R vers R et aussi une fonction de R^{+} dans R.

Notation : l'ensemble des fonctions de A dans B est noté B^{A}

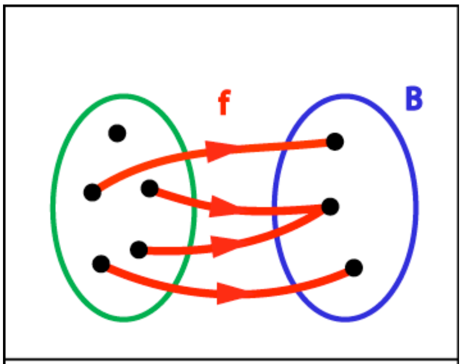
14. Transformation de l'ensemble E = fonction de E dans E

15. Surjection

Pour toute fonction f de A vers B :

$$\begin{gathered}\text{f est une surjection sur B}\\ \text{ssi}\\ \operatorname{im}f = B\\ \text{ssi}\\ \forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)\end{gathered}$$

définition



f est une surjection sur B

EX : $f : N \to N, x \mapsto 2x$ n'est pas une surjection sur N.

EX : $f : N \to N, x \mapsto x+1$ est une surjection sur N_o.

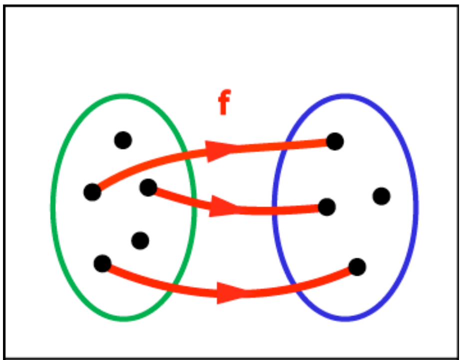
Terminologie : Surjection = Fonction surjective.

16. Injection

Pour toute fonction f :

$$\text{f est une injection}$$
$$\text{ssi}$$
$$f^{-1} \text{ est une fonction}$$
$$\text{ssi}$$
$$\forall x, y \in \operatorname{dom} f : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

définition



f est une injection

EX : $f : Z \to N, x \mapsto x^2$ n'est pas une injection

EX : $f : N \to N, x \mapsto x + 1$ est une injection

Terminologie : Injection = Fonction injective

17. Bijection

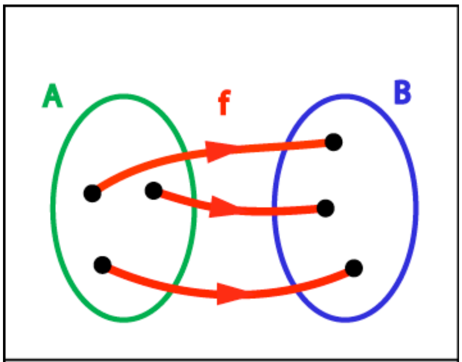
Pour toute fonction f et pour tous ensembles A et B

f est une bijection de A dans B
ssi
f est une fonction de A dans B, surjective sur B et injective

définition

Terminologie : Bijection = Fonction bijective

EX : $f : Z \to Z, x \mapsto x + 1$ est une bijection



f est une bijection de A dans B

EX : Pour tous ensembles A et B : $\#A = \#B$ <u>ssi</u> il existe une bijection de A dans B
Des ensembles de même cardinal sont dits « équipotents »

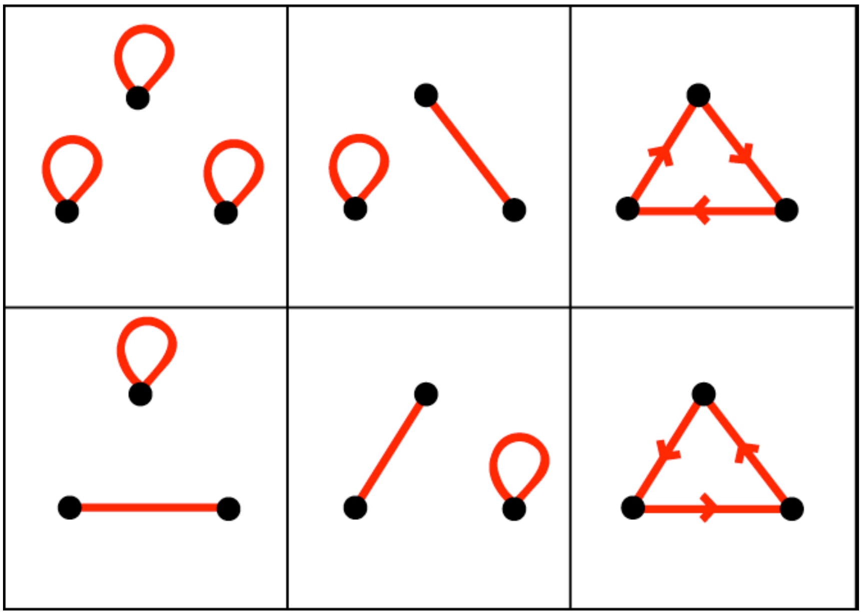
EX : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ -\frac{x+1}{2} \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases}$ est une bijection.

EX : N et Z sont équipotents.

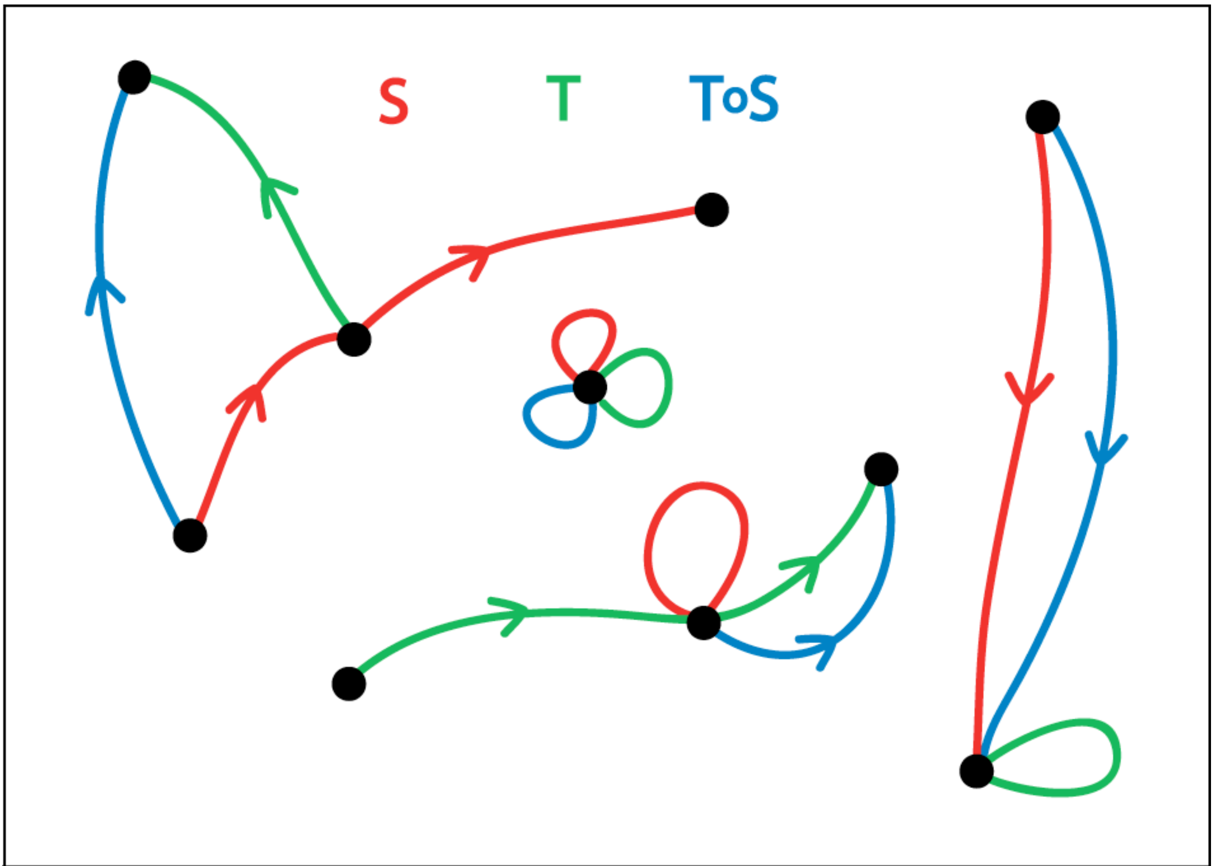
18. Permutation

Permutation de l'ensemble E = Bijection de E dans E

EX : Les six permutations d'un ensemble E de cardinal 3.



19. Composition



La composée ToS de S et T

Pour tout couple (S,T) de relations :

$$\text{La composée du couple (S,T)} = S \circ T = \{(x,y) | \exists z : xSz \text{ et } zTy\}$$

définition

EX : La composée de tout couple de relations est une relation

EX : La composée de tout couple de fonctions est une fonction.

EX : Qu'en est-il des injections, surjections et bijections ?